Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

5.1. (∗) Kurve vierter Ordnung, die eine Untermannigfaltigkeit ist.

Skizzieren Sie die Menge

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^4 + x_2^4 = 1 \right\}$$

und zeigen Sie, dass $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension 1 ist.

Tipp: Verwenden Sie den Satz vom regulären Wert.

5.2. Hyperboloid ist eine Untermannigfaltigkeit

Skizzieren Sie das einschalige Hyperboloid gegeben durch

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + 1 \right\}$$

und zeigen Sie, dass $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.

Tipp: Verwenden Sie den Satz vom regulären Wert.

5.3. Tangentialräume einiger Untermannigfaltigkeiten

Betrachten Sie die folgenden Untermannigfaltigkeiten M des Koordinatenraums. Berechnen Sie jeweils in jedem Punkt von M den Tangentialraum an M.

(a) Die Hyperbel

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 x_2 = 1 \right\}.$$

(b) **(∗)** Die Kurve

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^4 + x_2^4 = 1 \right\}.$$

(c) Das einschalige Hyperboloid

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + 1 \right\}.$$

Bemerkung: Laut einem Beispiel aus der Vorlesung und Aufgaben 5.1 und den 5.2 sind diese Mengen tatsächlich Untermannigfaltigkeiten.

5.4. (∗) Tangentialräume an die logarithmische Spirale, Tangentialabbildung

(a) Skizzieren Sie die logarithmische Spirale

$$M := \Big\{ e^y \Big(\cos y, \sin y \Big) \,\Big|\, y \in \mathbb{R} \Big\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension 1 ist und berechnen Sie in jedem Punkt von M den Tangentialraum an M.

(c) Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $R_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Rotation um den Winkel a im Gegenuhrzeigersinn. Zeigen Sie, dass das Bild der Abbildung

$$f : M \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) := e^a R_a x,$$

gerade M ist.

(d) Berechnen Sie die Tangentialabbildung (Ableitung) von f im Punkt $x_0 \in M$.

(e) Wie sind die Tangentialräume in zwei Punkten $x_0, x_0' \in M$ miteinander verwandt? Was ist mit dem Fall wenn x_0 und x_0' auf dem Strahl $(0, \infty) \times \{0\}$ liegen?

5.5. Tangentialabbildung der stereographischen Projektion

Berechnen Sie die Tangentialabbildung der stereographischen Projektion

$$S^{n-1} \setminus \Big\{ \Big(0, \dots, 0, 1\Big) \Big\} \to \mathbb{R}^{n-1}$$

in einem Punkt $x_0 \in S^{n-1} \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$.

Bemerkung: Siehe Serie 4 für die Definition der stereographischen Projektion.

5.6. Extrema

Betrachten Sie die Kurve

$$M := \Big\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, x_1^4 + x_2^4 = 1 \Big\}$$

und die Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1 + x_2.$$

(a) Zeigen Sie, dass f auf M beide Extremwerte (Maximum und Minimum) annimmt.

(b) Berechnen Sie das Maximum und Minimum von f auf M.

(c) Skizzieren Sie M und einige Niveaumengen der Funktion f. Vergleichen Sie mit Ihrer Antwort zu (b).

Betrachten Sie jetzt die Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \|x\|^2.$$

(d) Zeigen Sie, dass f auf M beide Extremwerte (Maximum und Minimum) annimmt.

(e) **(∗)** Berechnen Sie diese Werte.

(f) Zeichnen Sie M und einige Niveaumengen der Funktion f und vergleichen Sie diese mit Ihrer Antwort in 5.(e).

Wir betrachten jetzt die Menge

$$K := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^4 + x_2^4 \leq 1 \right\},$$

(diese unterscheidet sich von M durch das Ungleichheitszeichen,) und die Funktion

$$f : K \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \|x\|^2.$$

(g) **(∗)** Zeichnen Sie K.

(h) **(∗)** Zeigen Sie, dass f auf K beide Extremwerte annimmt.

Das Ziel der folgenden Teilaufgaben ist es, diese Extremwerte zu berechnen.

(i) Zeigen Sie, dass die Menge

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^4 + x_2^4 < 1 \right\}$$

offen ist.

(j) **(∗)** Berechnen Sie die kritischen Punkte von f auf U. (Wegen 5.(i) sind diese Punkte wohldefiniert.)

(k) **(∗)** Bestimmen Sie die Extremwerte von f auf K.

Tipp: Verwenden Sie die Teilaufgaben (e) und (j).

5.7. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Die folgende Teilmenge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y - x^2 = 0\}$$

ist eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(b) Die folgende Teilmenge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 - x = 0\}$$

ist eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(c) Die folgende Teilmenge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 - x^2 = 0\}$$

ist eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(d) Die folgende Teilmenge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 - x^2 = 0,\, y \geq 0\}$$

ist eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

(i) Wahr

(ii) Falsch