Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (∗) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

Die nächste Aufgabe wurde schon in Serie 6 gestellt. In der Zwischenzeit haben wir den nötigen Stoff in der Vorlesung behandelt.

6.1. Extrema

Betrachten Sie die Kurve

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^4 + x_2^4 = 1 \right\}$$

und die Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1 + x_2.$$

(a) Zeigen Sie, dass f auf M beide Extremwerte (Maximum und Minimum) annimmt.

(b) Berechnen Sie das Maximum und Minimum von f auf M.

(c) Skizzieren Sie M und einige Niveaumengen der Funktion f. Vergleichen Sie mit Ihrer Antwort zu (b).

Betrachten Sie jetzt die Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \|x\|^2.$$

(d) Zeigen Sie, dass f auf M beide Extremwerte (Maximum und Minimum) annimmt.

(e) **(∗)** Berechnen Sie diese Werte.

(f) Zeichnen Sie M und einige Niveaumengen der Funktion f und vergleichen Sie diese mit Ihrer Antwort in ((e)).

Wir betrachten jetzt die Menge

$$K := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^4 + x_2^4 \leq 1 \right\},$$

(diese unterscheidet sich von M durch das Ungleichheitszeichen,) und die Funktion

$$f : K \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \|x\|^2.$$

(g) **(∗)** Zeichnen Sie K.

(h) **(∗)** Zeigen Sie, dass f auf K beide Extremwerte annimmt.

Das Ziel der folgenden Teilaufgaben ist es, diese Extremwerte zu berechnen.

(i) Zeigen Sie, dass die Menge

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^4 + x_2^4 < 1 \right\}$$

offen ist.

(j) (∗) Berechnen Sie die kritischen Punkte von f auf U. (Wegen ((i)) sind diese Punkte wohldefiniert.)

(k) (∗) Bestimmen Sie die Extremwerte von f auf K.

Tipp: Verwenden Sie die Teilaufgaben (e) und (j).

6.2. (∗) Riemann-Integral.

Betrachten Sie die Funktion

$$f : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1.$$

(a) Skizzieren Sie den Graph von f.

(b) Versuchen Sie, aus geometrischen Überlegungen den Wert des Integrals von f zu erraten.

(c) Zeigen Sie, dass f eigentlich Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie sein Riemann-Integral.

6.3. Linearität der Integration.

Seien $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, $\phi, \psi : R \to \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_R c\phi(x)\,dx = c\int_R \phi(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\int_R (\phi + \psi)(x)\,dx = \int_R \phi(x)\,dx + \int_R \psi(x)\,dx. \tag{2}$$

Bemerkungen:

- Für die Definition des Integrals einer Treppenfunktion siehe die Vorlesung.
- Die Gleichheiten (1) und (2) bedeuten, dass Integration von Treppenfunktionen eine lineare Abbildung ist. (Das gilt sogar für die Integration von allgemeinen Riemann-integrierbaren Funktionen, wie wir in der Vorlesung sehen werden.)

6.4. Integral der Gaußschen Glockenkurve.

Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uneigentlich Riemann-integrierbar* g. d. w. f über jedes beschränkte Intervall eigentlich Riemann-integrierbar ist, $\int_0^{x_+} f(x)dx$ für $x_+ \to \infty$ konvergiert und $\int_{x_-}^0 f(x)dx$ für $x_- \to -\infty$ konvergiert. In diesem Fall definieren wir das *uneigentliche Riemann-Integral von f* als

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx := \lim_{x_+\to\infty} \int_0^{x_+} f(x)dx + \lim_{x_-\to-\infty} \int_{x_-}^0 f(x)dx.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{-x^2}$$

uneigentlich Riemann-integrierbar ist mit

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \le 3.$$

Tipp: Schätzen Sie e^{-x^2} durch Funktionen ab, die Sie explizit integrieren können, und verwenden Sie die Monotonie des Riemann-Integrals.

Bemerkungen:

- Die obige Funktion f heisst *gaußsche Glockenkurve*. Sie spielt eine wichtige Rolle in der Stochastik, wo sie als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung auftritt.
- In der Vorlesung werden wir das Integral dieser Funktion mittels eines zweidimensionalen Integrals und der Substitutionsregel berechnen.

6.5. Zwei-dimensionale Integrale.

(a) **(∗)** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1 x_2^2,$$

eigentlich Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie ihr Integral.

(b) **($*$)** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [0,1] \times [1,4] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := e^{x_1 \sqrt{x_2}},$$

eigentlich Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie ihr Integral.

(c) Berechnen Sie

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_0^1 \arctan\left(e^{x_1} x_2\right) dx_1 \right) dx_2.$$

6.6. Volumen eines Simplex (Hypertetraeder).

(a) Skizzieren Sie die Menge

$$\Delta_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1, \dots, x_n \geq 0,\, x_1 + \dots + x_n \leq 1 \right\}$$

für $n = 1, 2, 3$.

(b) Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Jordan-Mass von Δ_n.

Tipps:

- Sie dürfen annehmen, dass Δ_n Jordan-messbar ist.
- Versuchen Sie das Jordan-Mass von Δ_n durch das Jordan-Mass von Δ_{n-1} auszudrücken und argumentieren Sie dann induktiv.
- Überlegen Sie wie sich das Jordan-Mass unter Skalierung verhält. Also wenn $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar ist und $c > 0$, dann gilt $|cA| = c^n |A|$. Wieso?

Bemerkung: Diese Menge wird als n-Simplex bezeichnet.

Das folgende Resultat werden Sie unten verwendet, um das Volumen des Einheitsballs in $\mathbb{R}^n$ zu berechnen.

6.7. Integral von Potenzen des Cosinus.

Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}\pi, & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3} \cdot 2, & \text{falls } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Hier verwenden wir die Konvention, dass das leere Produkt 1 ergibt. Das leere Produkt kommt in den Fällen $n = 0, 1$ vor.

6.8. (∗) Volumen des Einheitsballs.

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie das Jordan-Mass des abgeschlossenen Einheitsballs $\overline{B}^n := \overline{B}_1^n(0) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Tipps:

- Sie dürfen annehmen, dass $\overline{B}^n$ Jordan-messbar ist.
- Versuchen Sie das Jordan-Mass von $\overline{B}^n$ durch das Jordan-Mass von $\overline{B}^{n-1}$ auszudrücken und argumentieren Sie dann induktiv.
- Verwenden Sie wie in Aufgabe 11.6 das Verhalten des Jordan-Masses unter Skalierung.

6.9. Volumen von Zylinder, Kegel und Ball

(a) Skizzieren Sie den Zylinder

$$\overline{B}_1^2 \times [0,1]$$

und den Kegel

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \times [0,1] \,\middle|\, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_3 \right\}.$$

(b) Berechnen Sie das Jordan-Mass dieser beiden Mengen.

(c) Was ist der Zusammenhang zwischen den Volumen des Zylinders, des Kegels, und des Halb-Balls

$$\left\{ x \in \overline{B}_1^3 \,\middle|\, x_3 \geq 0 \right\}?$$

Wieso?

6.10. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Es sei
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}.$$
Berechnen Sie das folgende Integral:
$$\int_A e^{x-\frac{1}{3}x^3} y \, dxdy.$$

(i) 0

(ii) $e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}}$

(iii) $e^{-\frac{2}{3}} - e^{\frac{2}{3}}$

(iv) $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}}\right)$

(v) $\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{2}{3}} - e^{\frac{2}{3}}\right)$

(b) Berechnen Sie das folgende Integral:
$$\int_{\overline{B}_1(0)} e^{x-\frac{1}{3}x^3} y \, dxdy$$

(i) 0

(ii) $e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}}$

(iii) $e^{-\frac{2}{3}} - e^{\frac{2}{3}}$

(iv) $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}}\right)$

(v) $\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{2}{3}} - e^{\frac{2}{3}}\right)$

(c) Berechnen Sie das folgende Integral:
$$\int_{\overline{B}_1(0)} e^{x-\frac{1}{3}x^3} |y| \, dxdy$$

(i) 0

(ii) $e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}}$

(iii) $e^{-\frac{2}{3}} - e^{\frac{2}{3}}$

(iv) $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}}\right)$

(v) $\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{2}{3}} - e^{\frac{2}{3}}\right)$