Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

7.1. (∗) Kuchenstück

(a) Seien $\phi_- \leq \phi_+ \in (-\pi, \pi)$. Skizzieren Sie die Menge

$$S := \Big\{ r\Big(\cos\phi, \sin\phi\Big) \,\Big|\, r \in [0,1],\, \phi \in [\phi_-, \phi_+] \Big\}.$$

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S, also das zwei-dimensionale Jordan-Mass.

7.2. Integral einer drehinvarianten Funktion in $\mathbb{R}^3$

Seien $r_0 > 0$ und $\widetilde{f} : [0, r_0] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren

$$f : \overline{B}^3_{r_0} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \widetilde{f}(\|x\|).$$

(a) Finden Sie eine Formel, die das drei-dimensionale Integral $\int_{\overline{B}^3_{r_0}} f(x)\, dx$ durch $\widetilde{f}$ ausdrückt.

Tipp: Verwenden Sie Kugelkoordinaten und die Substitutionsregel.

(b) Verwenden Sie diese Formel, um das Volumen von $\overline{B}^3_{r_0}$ zu berechnen.

7.3. (∗) Flächeninhalt

(a) Es seien $0 < a < b$, $0 < c < d$. Skizzieren Sie die Menge

$$S := \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, 0 < x,\, a \leq \frac{y}{x} \leq b,\, c \leq xy \leq d \Big\}.$$

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S.

Tipp: Finden Sie eine Koordinatentransformation, unter der S eine einfachere Form annimmt, und verwenden Sie die Substitutionsregel.

7.4. (∗) Länge eines Bogens auf der logarithmischen Spirale.

Wir betrachten den Bogen auf der logarithmischen Spirale, gegeben durch

$$C := \Big\{ e^t\Big(\cos t, \sin t\Big) \,\Big|\, t \in [0, 2\pi] \Big\}.$$

(a) Skizzieren Sie C.

(b) Zeigen Sie, dass C eine glatte Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit Rand[1] ist.

Tipp: Finden Sie eine globale glatte Parametrisierung ψ von C. Vergleichen Sie mit einer Aufgabe aus Übungsserie 5. Sie dürfen verwenden, dass ψ glatt und injektiv ist und eine stetige Umkehrung besitzt.

(c) Bestimmen Sie den Rand von C.

(d) Berechnen Sie die Bogenlänge von C.

7.5. (∗) Ellipse, Orientierungen, C^k-Gebiet, positive Orientierung des Randes, Kurvenintegral eines Vektorfeldes.

Betrachten Sie die Ellipse

$$C := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + 4x_2^2 = 1 \right\}.$$

(a) Skizzieren Sie C.

(b) Zeigen Sie, dass C eine glatte Kurve ist.

Tipp: Schauen Sie nochmals Übungsserie 5 an.

(c) Bestimmen Sie für jedes $x \in C$ den Tangentialraum an C im Punkt x.

Tipp: Schauen Sie nochmals Übungsserie 5 an.

(d) Bestimmen Sie eine Orientierung T (= Einheitstangentialvektorfeld) von C.

Geben sie noch eine andere Orientierung von C an.

Bemerkung: Es gibt auf C genau zwei Orientierungen.

(e) Zeigen Sie, dass die Menge

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + 4x_2^2 < 1 \right\}$$

ein C^∞-Gebiet ist.

(f) Zeigen Sie, dass ∂U, der Rand von U, durch C gegeben ist.

(g) Bestimmen Sie die positive Orientierung von $C = \partial U$ (bezüglich U).

[1] = glatte eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ mit Rand

(h) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{C,T} X \cdot d\mathbf{s} = \int_C X \cdot T \, ds$$

für das Vektorfeld

$$X(x) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

7.6. Integral der Rotation eines Vektorfelds

Wir schreiben $B^2 := B_1^2(0)$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{B^2} \operatorname{rot} X(x) \, dx$$

für

$$X(x) := \|x\|^2 \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

7.7. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|.$$

Berechnen Sie das Integral von f über die Kreisscheibe $\overline{B}_1^2$.

(i) π

(ii) 2π

(iii) $\frac{2\pi}{3}$

(iv) $2\pi \log(2)$

(b) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\|x\|}.$$

Berechnen Sie das Integral von f über den Annulus

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|x\| \leq 2 \right\}.$$

(i) π

(ii) 2π

(iii) $\frac{2\pi}{3}$

(iv) $2\pi \log(2)$

(c) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\|x\|^2}.$$

Berechnen Sie das Integral von f über den Annulus

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|x\| \leq 2 \right\}.$$

(i) π

(ii) 2π

(iii) $\frac{2\pi}{3}$

(iv) $2\pi \log(2)$