Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (∗) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

8.1. (∗) Kurve mit Rand, Koorientierung

(a) Skizzieren Sie die Menge

$$M := \left\{ x \in [0,1]^2 \,\middle|\, x_1 = x_2 \right\}.$$

(b) Zeigen Sie mittels der Definition, dass M eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ mit Rand ist.

(c) Bestimmen Sie ∂M, den intrinsischen Rand von M.

(d) Bestimmen Sie eine Koorientierung ν (= Einheitsnormalenvektorfeld) von M.

Geben Sie noch eine andere Koorientierung von M an.

Bemerkung: Es gibt auf M genau zwei Koorientierungen.

8.2. (∗) Kugelkappe, intrinsischer Rand, Koorientierung, induzierte Orientierung des Randes, Flächeninhalt.

Sei $a \in (0,1)$.

(a) Skizzieren Sie die Kugelkappe

$$\Sigma := \left\{ x \in S^2 \,\middle|\, x_3 \geq a \right\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass Σ eine glatte Untermannigfaltigkeit mit Rand ist.

Tipp: Verwenden Sie eine globale Parametrisierung von Σ.

(c) Bestimmen Sie $\partial\Sigma$, den intrinsischen Rand von Σ.

(d) Bestimmen Sie eine Koorientierung ν (= Einheitsnormalenvektorfeld) von Σ.

Geben Sie noch eine andere Koorientierung von Σ an.

Bemerkung: Es gibt auf Σ genau zwei Koorientierungen.

(e) Bestimmen Sie die durch ν induzierte Orientierung des Randes $\partial\Sigma$.

(f) Berechnen Sie den Flächeninhalt von Σ, d. h. ihr zwei-dimensionales Volumen.

(g) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S^2.

8.3. Abgeschnittenes Paraboloid, intrinsischer Rand, Koorientierung, induzierte Orientierung des Randes, Flächeninhalt.

Es sei $r_0 > 0$.

(a) Skizzieren Sie das abgeschnittene Paraboloid (= "Parabolschüssel")

$$\Sigma := \Sigma_{r_0} := \Big\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; \frac{1}{2}\Big(x_1^2 + x_2^2\Big) = x_3,\ x_1^2 + x_2^2 \leq r_0^2 \Big\}. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass Σ eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ mit Rand ist.

Tipp: Verwenden Sie eine globale Parametrisierung $\psi : \overline{V} \to \mathbb{R}^3$ von Σ.

(c) Bestimmen Sie $\partial\Sigma$, den intrinsischen Rand von Σ.

(d) Bestimmen Sie eine Koorientierung ν (= Einheitsnormalenvektorfeld) von Σ.

Geben Sie noch eine andere Koorientierung von Σ an.

Bemerkung: Es gibt auf Σ genau zwei Koorientierungen.

(e) Bestimmen Sie die durch ν induzierte Orientierung des Randes $\partial\Sigma$.

(f) Berechnen Sie den Flächeninhalt von Σ, d. h. ihr zwei-dimensionales Volumen.

Tipp: Verwenden Sie die Formel aus der Vorlesung

$$\mathrm{Vol}_2(\Sigma) = \int_{\overline{V}} \Big\| D_1\psi(y) \times D_2\psi(y) \Big\| dy,$$

wobei $\psi : \overline{V} \to \mathbb{R}^3$ eine globale Parametrisierung von Σ ist.

(g) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{r_0 \to 0} \frac{\mathrm{Vol}_2(\Sigma_{r_0})}{\mathrm{Vol}_2(\overline{B}^2_{r_0})}.$$

Überlegen Sie, ob das Ergebnis mit Ihrer Intuition übereinstimmt.

8.4. (∗) Fluss durch abgeschnittenes Paraboloid

Wir betrachten das abgeschnittene Paraboloid Σ, gegeben durch (1). Wir fixieren eine Koorientierung ν von Σ. (Siehe Aufgabe 8.3(d) für die Berechnung einer Koorientierung.) Berechnen Sie für die Vektorfelder

(i) $X \equiv e_3$

(ii) $X \equiv e_1$

den Fluss (=Oberflächenintegral)

$$\int_{\Sigma,\nu} X \cdot d\mathbf{A},$$

indem Sie die Definition des Flusses verwenden.

Die folgende Aufgabe wird in der Vorlesung verwendet, um eine Formel für das Integral über eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ zu geben.

8.5. Gramsche Determinante für eine 3×2-Matrix.

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, also eine 3×2-Matrix mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass gilt

$$\det(A^T A) = \|A_1 \times A_2\|^2,$$

wobei A_j die j-te Spalte von A ist.

8.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld und $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes glattes Gebiet. Falls gilt $\operatorname{rot}(X)(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, dann ist der Flächeninhalt von U gegeben durch

$$|U| = \int_{\partial U} X \cdot d\mathbf{s},$$

wobei das Kurvenintegral mit der positiven Orientierung berechnet wird.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(b) Betrachten Sie die Einheitskreisscheibe $\overline{B}_1^2$ und das Vektorfeld

$$X(x) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 + x_1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\partial \overline{B}_1^2} X \cdot d\mathbf{s},$$

wobei die positive Orientierung verwendet wird.

(i) 0

(ii) 1

(iii) π

(iv) 2π

(c) Betrachten Sie die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^3$:

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2,\ 1 \leq x_3 \leq 2\}.$$

Welche der folgenden Abbildungen ist eine globale Parametrisierung von Σ?

(i) $\psi : \overline{B}_2^2 \setminus B_1^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \end{pmatrix}$

(ii) $\psi : \overline{B}_2^2 \setminus B_1^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

(iii) $\psi : \overline{B}_1^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \end{pmatrix}$

(iv) $\psi : \overline{B}_1^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

(d) Berechnen Sie den zweidimensionalen Flächeninhalt der Teilmenge

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2,\ 1 \leq x_3 \leq 2\}.$$

(i) 3π

(ii) $3\sqrt{2}\pi$

(iii) $\sqrt{3}\pi$

(iv) $\log(2)\pi$