Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

Der erste Teil der folgenden Aufgabe wurde schon in Übungsserie 8 gestellt.

9.1. (∗) Fluss durch abgeschnittenes Paraboloid, Satz von Stokes. Wir betrachten das abgeschnittene Paraboloid (= "Parabolschüssel")

$$\Sigma := \Sigma_{r_0} := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) = x_3,\ x_1^2 + x_2^2 \leq r_0^2 \right\}.$$

Wir fixieren eine Koorientierung ν von Σ. (Siehe eine Aufgabe aus Übungsserie 8 (Abgeschnittenes Paraboloid, ...) für die Berechnung einer Koorientierung.)

(a) Berechnen Sie für die Vektorfelder

(i) $X \equiv e_3$

(ii) $X \equiv e_1$

den Fluss (=Oberflächenintegral)

$$\int_{\Sigma,\nu} X \cdot d\mathbf{A},$$

indem Sie die Definition des Flusses verwenden.

(b) Wir definieren

$$Y(x) := \sin(x_3) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss

$$\int_{\Sigma,\nu} (\nabla \times Y) \cdot d\mathbf{A}.$$

(c) Berechnen Sie den Fluss $\int_{\Sigma,\nu} e_3 \cdot d\mathbf{A}$ nochmals, indem Sie den Satz von Stokes verwenden. Finden Sie dazu ein Vektorfeld Y, dessen Rotation gleich e_3 ist.

9.2. (∗) Satz von Gauß.

Betrachten Sie die Menge $U := B_2^2(0) \setminus \overline{B}_1^2(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ und das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\nabla \cdot X = \operatorname{div} X$, die Divergenz von X.

(b) Bestimmen Sie die nach aussen weisende Koorientierung ν des Randes ∂U.

(c) Berechnen Sie den Fluss

$$\int_{\partial U, \nu} X \cdot d\mathbf{A}$$

direkt mittels der Definition.

(d) Berechnen Sie diesen Fluss nochmals mit Hilfe des Satzes von Gauß.

9.3. Vektoranalytische Identitäten.

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse C^2 und $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld der Klasse C^2. Zeigen Sie, dass die folgenden Identitäten gelten.

(a) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(b) $\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f$

(c) **(*)** $\nabla \cdot (\nabla \times X) = 0$

(d) $\nabla \times (\nabla \times X) = \nabla(\nabla \cdot X) - \Delta X$

Bemerkung: Hier ist $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ der Laplace-Operator.

9.4. Faradaysches Induktionsgesetz, Maxwellgleichung, Satz von Stokes.

Es seien E und B das elektrische und das magnetische Feld, wobei E und B von der Zeit $t \in \mathbb{R}$ und dem Ort $x \in \mathbb{R}^3$ abhängen. Das Faradaysche Induktionsgesetz besagt, dass die zeitliche Veränderung des Flusses von B durch eine koorientierte Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ gleich der negativen Zirkulation von E durch $\partial\Sigma$ ist. Leiten Sie daraus die folgende Gleichung ab:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{1}$$

Bemerkungen:

- Das Faradaysche Gesetz impliziert, dass ein sich ändernder magnetischer Fluss durch eine Fläche, die von einem Draht umspannt wird, einen Strom im Draht induziert. Dies ist das grundlegende Prinzip von Elektromotoren und Generatoren. Gleichung (1) ist eines der vier Maxwell-Gesetze der Elektrodynamik.

- Umgekehrt wird in der Vorlesung in einem Beispiel gezeigt, dass die Maxwellgleichung (1) das faradaysche Induktionsgesetz impliziert.
- Für eine ausführliche Behandlung der Maxwellgleichungen und des faradayschen Induktionsgesetzes siehe die Vorlesung *Elektromagnetische Felder und Wellen*.

9.5. Coulomb-Gesetz.

Das Coulomb-Gesetz besagt, dass zwei elektrisch geladene Teilchen sich anziehen oder abstossen mit einer Kraft, welche proportional ist zum Produkt der Ladungen und invers proportional zum Quadrat der Distanz zwischen den Teilchen. Wir nehmen hier an, dass es sich um Punktladungen handelt also Teilchen ohne räumliche Ausdehnung.

Leiten Sie das Coulomb-Gesetz aus den folgenden Prinzipien ab:

(i) Die elektrostatische Kraft F auf die Ladung q, welche durch die Ladung Q generiert wird ist proportional zu Qq. Sie zeigt von x_0 nach x, wo x und x_0 die Positionen von q und Q bezeichnen.

(ii) Elektrische Ladung ist die Quelle der elektrostatischen Kraft, und somit verschwindet die Divergenz der elektrostatischen Kraft, welche durch Q generiert wird, überall ausser im Punkt x_0.

(iii) Die Gesetze der Physik sind invariant unter Translation.

(iv) Die Gesetze der Physik sind invariant unter Rotation.

Bemerkung: Für eine ausführliche Behandlung des Coulomb-Gesetzes siehe die Vorlesung *Elektromagnetische Felder und Wellen*.