

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (*) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

Aufgaben 10.1, 10.2, 10.3 dienen der Wiederholung von Stoff, den Sie bisher in Analysis 2 gelernt haben. Sie brauchen diese Aufgaben nicht alle zu lösen, wenn Ihnen dieser Stoff noch vertraut ist. Wenn Ihnen einzelne dieser Aufgaben Mühe bereiten, dann empfehlen wir, den entsprechenden Stoff nochmals anzuschauen.

10.1. Partielle Ableitungen. Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der gegebenen Funktion bis zur zweiten Ordnung:

- (a) $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) := x_1 x_2^2$, wobei x_i die i -te Koordinate von $x \in \mathbb{R}^2$ ist.
- (b) $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x, y) := xy^2$. (Wir nennen die Koordinaten jetzt stattdessen x und y .)

10.2. GDG (gewöhnliche Differentialgleichungen). Führen Sie (i)-(iv) für jedes Beispiel (a)-(e) aus. In dieser Aufgabe ist die gesuchte Funktion u eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

- (i) Geben Sie die Ordnung der GDG an.
- (ii) Geben Sie an, ob die Gleichung linear ist.
- (iii) Falls die Gleichung linear ist, geben Sie dann an, ob sie homogen oder inhomogen ist.
- (iv) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der GDG.
 - (a) $u'(x) = x^2$
 - (b) $u' - 2u = 0$
 - (c) $u' = u^2$ (Die Lösung ist hier nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.)
 - (d) $u'' - 5u' = -6u$
 - (e) $u'(x) - 2u(x) = e^{2x}$

10.3. Lösungsmenge einer GDG. Schreiben Sie für (a) und (d) wie in Aufgabe 10.2 die Lösungsmenge der GDG in Mengenschreibweise auf, also zum Beispiel als $\{u + c \mid c \in \mathbb{R}\}$, wobei die Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $u(x) := e^x$ definiert ist.

10.4. (*) Partielle Differentialgleichungen. Führen Sie (i)-(iii) für jedes Beispiel (a)-(d) aus. In dieser Aufgabe ist die gesuchte Funktion u eine Funktion mehrerer Variablen.

- (i) Geben Sie die Ordnung der PDG an.
 - (ii) Geben Sie an, ob die Gleichung linear ist.
 - (iii) Falls die Gleichung linear ist, geben Sie dann an, ob sie homogen oder inhomogen ist.
- (a) $u_x(x, y) = xu_{yy}(x, y)$
 - (b) $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) - x = 0$
 - (c) $u \partial_x u = 0$ ($n = 2$, x, y = Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$)
 - (d) $\Delta \Delta u = u$

10.5. (*) Transportgleichung. Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^n$ als $t, x = (x_1, \dots, x_n)$ und bezeichnen mit ∇ den Gradienten bezüglich x .

- (i) Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $v \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$u : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(t, x) := g(x - tv).$$

Rechnen Sie nach, dass u die Transportgleichung

$$u_t + v \cdot \nabla u = 0$$

löst.

Tipp: Verwenden Sie dazu die Kettenregel.

- (ii) Berechnen Sie eine Lösung u der Transportgleichung

$$u_t(t, x) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \nabla u(t, x) = 0, \quad \text{für } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

die die Anfangsbedingung

$$u(t = 0, x) = x_1 \quad (2)$$

erfüllt.

Tipp: Verwenden Sie die Lösungsformel für (1) aus (i) und setzen Sie die Bedingung (2) ein.

Bemerkungen zur chemischen Relevanz dieser Aufgabe: Wie in der Vorlesung erwähnt, beschreibt die PDG (1) den Transport einer chemischen Substanz in einer Strömung mit konstanter Geschwindigkeit $v = (1, 2, 3)$, ohne Quellen, Senken und Diffusion. Die Funktion u spielt hierbei die Rolle der Stoffmengenkonzentration. Die Anfangsbedingung (2) entspricht der anfänglichen Versuchsanordnung, die durch einen Experimentator/ eine Experimentatorin vorgegeben wird. Mathematiker/innen haben bewiesen, dass die Lösung der PDG (1) zusammen mit der Anfangsbedingung (2) eindeutig ist. Das bedeutet, dass diese PDG bei bekannten Anfangsdaten die Zukunft des Systems vollständig bestimmt.

10.6. Inhomogene Laplacegleichung in einer Dimension. In dieser Aufgabe ist $n = 1$.

- (i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ der (homogenen) Laplacegleichung

$$\Delta u = 0. \tag{3}$$

- (ii) Bestimmen Sie die eindeutige Lösung von (3), die die Randbedingungen

$$\nabla u(-1) = 0, \quad \nabla u(1) = 0 \tag{4}$$

sowie die Bedingung

$$\int_{-1}^1 u(x) dx = 2$$

erfüllt.

Bemerkung: Da wir im eindimensionalen Fall sind, ist (3) eine GDG. (Welche?) Des Weiteren ist der Gradient ∇u gleich der Ableitung u' .

Bemerkungen zur chemischen Relevanz dieser Aufgabe: Wir betrachten eine diffundierende chemische Substanz in einem Behälter, der durch das Intervall $[-1, 1]$ gegeben ist. Wie in der Vorlesung erwähnt, beschreibt die Laplacegleichung (3) einen Gleichgewichtszustand der Substanz. Die Funktion u spielt hierbei die Rolle der Stoffmengenkonzentration.

Die Randbedingungen (4) bedeuten, dass der Behälter isolierend ist. Das folgt aus dem Gesetz von Fick. Dieses besagt, dass die Teilchenstromdichte J proportional und entgegengerichtet zum Gradienten der Konzentration u ist. D. h. , es gibt eine Konstante $a > 0$, sodass

$$J = -a \nabla u. \tag{5}$$

(a heisst der Diffusionskoeffizient.) Da der Behälter isolierend ist, fliesst keine Substanz über den Rand ab, d. h. $J(0) = 0 = J(1)$. Einsetzen in (5) ergibt

$$\nabla u(-1) = -\frac{J(-1)}{a} = 0, \quad \nabla u(1) = 0.$$

Das sind die Randbedingungen (4).

Die Bedingung $\int_{-1}^1 u(x)dx = 2$ besagt, dass die totale Stoffmenge gleich 2 ist.

10.7. Maxwell-Gleichungen im Vakuum, Wellengleichung Wie in der Vorlesung erwähnt, sind die Maxwell-Gleichungen für das elektrische und das magnetische Feld gegeben durch:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{Gaußsches Gesetz für das elektrische Feld}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Gaußsches Gesetz für das magnetische Feld}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0, \quad \text{Faradaysches Induktionsgesetz}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j} \quad \text{Ampèresches Gesetz mit Maxwellschem Verschiebungsstrom}$$

Wir betrachten den Fall eines Vakuums, d. h., $\rho = 0$ und $j = 0$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbf{B}$ die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u = c^2 \Delta u$$

löst.

Hinweis: Verwenden Sie die vektoranalytische Identität

$$\nabla \times (\nabla \times X) = \nabla(\nabla \cdot X) - \Delta X.$$

(Siehe Übungsserie 9. Der Laplace-Operator wird hier auf jede Komponente von X angewendet.)

(ii) Drücken Sie c durch ε_0 und μ_0 aus.

(iii) Berechnen Sie c , indem Sie die Näherungswerte

$$\varepsilon_0 \approx 8.8541878188 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}, \quad \mu_0 \approx 1.25663706127 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

verwenden. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Lichtgeschwindigkeit.

Bemerkung: In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass $\mathbf{E}$ die Wellengleichung löst.

10.8. Superpositionsprinzip und Wärmeleitungsgleichung. Sei $n = 1$ und $U = \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^2$. Wir schreiben die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ als t, x und betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u = u_{xx}.$$

(i) Überprüfen Sie, dass für jede Zahl $\xi \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$u^\xi(t, x) := e^{-\xi^2 t} \sin(\xi x)$$

die Wärmeleitungsgleichung löst.

(ii) Seien $\xi_1, \xi_2, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Funktion

$$u := a_1 u^{\xi_1} + a_2 u^{\xi_2}.$$

Zeigen Sie, dass u die Wärmeleitungsgleichung löst.

Hinweis: Sie brauchen in dieser Teilaufgabe nichts zu rechnen.

(iii) Wir betrachten $U = \mathbb{R}^2$ und die PDG

$$u_{x_1} = u^2.$$

Gilt das Superpositionsprinzip für diese PDG? Begründen Sie Ihre Antwort.