Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

11.1. elektrostatisches Potential, Poissongleichung

(i) Wir betrachten das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und das magnetische Feld $\mathbf{B}$ und nehmen an, dass $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ zeitlich konstant sind, d. h. nicht von t abhängen.[1] Wir können $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ also als zeitunabhängige Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$ auffassen, d. h. als Abbildungen $\mathbf{E}, \mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{E}$ ein Potential besitzt, d. h., dass es eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

(Wir verwenden hier die Physikkonvention für das Vorzeichen.)

Tipps:

- Verwenden Sie eine der Maxwellgleichungen. Siehe die Vorlesung.
- Verwenden Sie einen Satz aus Analysis 2 über die Konservativität eines Vektorfeldes.

  Bemerkung: Die Funktion φ ist bis auf eine additive Konstante eindeutig. (Siehe einen Satz aus der Vorlesung.) Sie heisst *elektrostatisches Potential*. Der Unterschied dieses Potentials an zwei verschiedenen Punkten ist die *elektrische Spannung* zwischen den Punkten.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

wobei ρ die Ladungsdichte und ε_0 die elektrische Feldkonstante ist.

Bemerkung: Das Potential erfüllt also die Poissongleichung, d. h. die inhomogene Laplacegleichung.

Tipp: Verwenden Sie eine der Maxwellgleichungen. Siehe die Vorlesung.

[1] Diese Annahme wird in der Elektro*statik* gemacht. Die Elektro*dynamik* behandelt die allgemeine Situation, in der sich diese Felder ändern können.

Die folgende Aufgabe wird in Aufgabe 11.3 gebraucht werden.

11.2. Positive Definitheit einer quadratischen Matrix.

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Verwenden Sie dazu das charakteristische Polynom.

(ii) Ist diese Matrix positiv definit?

Tipp: Verwenden Sie die in der Vorlesung erwähnte Tatsache, dass eine symmetrische reelle Matrix genau dann positiv definit ist, wenn alle ihre Eigenwerte (strikt) positiv sind.

(iii) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iv) Ist diese Matrix positiv definit?

(v) Ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

positiv definit?

11.3. (∗) Elliptische, hyperbolische, parabolische Differentialgleichungen.

(i) Zeigen Sie, dass die gegebene lineare PDG zweiter Ordnung den angegebenen Typ hat.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 11.2.

(a) $U = \mathbb{R}^2$,

$$u_{x_1x_1} + u_{x_1x_2} = -u_{x_2x_2} \qquad \text{elliptisch}$$

(b) $U = \mathbb{R}^3$,

$$u_{x_1x_1} + u_{x_1x_2} = -u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} \qquad \text{elliptisch}$$

(c) $U = \mathbb{R}^3$, Standardkoordinaten: t, x_1, x_2,

$$u_{tt} - u_{x_1x_1} = u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} \qquad \text{hyperbolisch}$$

(d) $U = \mathbb{R}^3$, Standardkoordinaten: t, x_1, x_2,

$$u_t - u_{x_1x_1} - u_{x_1x_2} = u_{x_2x_2} \qquad \text{parabolisch}$$

(ii) In dieser Teilaufgabe ist $U = \mathbb{R}^2$, und wir schreiben die Standardkoordinaten als x_1, x_2. Überprüfen Sie für die gegebene lineare PDG zweiter Ordnung, ob sie elliptisch oder hyperbolisch ist.

Tipp: Verwenden Sie eine Proposition aus der Vorlesung, die Elliptizität und Hyperbolizität im Fall $U \subseteq \mathbb{R}^2$ charakterisiert.

(a) $\sin(x_1)u_{x_1x_1} + 4u_{x_1x_2} = -u_{x_2x_2} + u_{x_2} + 7u$

(b) $u_{x_1x_1} = u_{x_1x_2} - (1 + x_2^2)u_{x_2x_2} + x_1u$

11.4. Variablentransformation für eine PDG auf $\mathbb{R}^2$.

(i) Wir schreiben die Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$ als x_1, x_2 und betrachten die PDG

$$u_{x_1x_2} = 0. \tag{1}$$

Finden Sie die allgemeine Lösung u dieser PDG. Zeigen Sie, dass das gefundene u die PDG tatsächlich löst.

Tipp: Integrieren Sie die PDG zuerst in x_2-Richtung und dann in x_1-Richtung.

(ii) Führen Sie für die PDG (1) die Variablentransformation $x \mapsto y$ durch, die durch die folgende Abbildung gegeben ist:

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y = \varphi(x) := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

D. h. , formulieren Sie die PDG als eine PDG für die Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um, für welche $v \circ \varphi = u$ gilt. (v ist eine Funktion der Variablen y_1, y_2.)

Tipp: Setzen Sie die Gleichheit $v \circ \varphi = u$ in die PDG für u ein und verwenden Sie die Kettenregel.

(iii) Wie heisst die transformierte (umformulierte) PDG (für die Funktion v)? Welchen Typ hat diese PDG?

(iv) Welchen Typ hat die PDG (1)?

(v) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der transformierten PDG (für v).

Tipp: Verwenden Sie (i).