Lösung 14

1. Aufgabe (Prüfung Winter 2011)

Multiplizieren der ersten Zeile von A mit der ersten Spalte von B muss 1 ergeben, daraus folgt $x_1 = 1$, das selbe macht man mit der dritten Zeile von A und der dritten Spalte von B um $x_2 = -1$ zu erhalten.

2. Aufgabe

Die n-ten Potenzen sind

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } n = 2 \text{ sowie die Nullmatrix für } n \geq 3,$$

$$C^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie, dass der letzte Ausdruck per Induktion unter Verwendung der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus folgt:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos(n\varphi)\cos(\varphi) - \sin(n\varphi)\sin(\varphi) & -\sin(n\varphi)\cos(\varphi) - \cos(n\varphi)\sin(\varphi) \\ \sin(n\varphi)\cos(\varphi) + \cos(n\varphi)\sin(\varphi) & \cos(n\varphi)\cos(\varphi) - \sin(n\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos((n+1)\varphi) & -\sin((n+1)\varphi) \\ \sin((n+1)\varphi) & \cos((n+1)\varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Multiple Choice

1. Ergebnis: (a).

Es gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 6 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 38 \end{pmatrix}.$$

2. Ergebnis: (d).

Es gilt

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$