# Lösung 15

## 1. Aufgabe

(a) Entwicklung nach der zweiten Zeile liefert

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 1\cdot(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 0 \\ &= -(2\cdot 3 - 0\cdot 1) + (-1\cdot 3 - 1\cdot 1) \\ &= -10.\end{aligned}$$

(b) Entwicklung nach der zweiten Zeile liefert

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= -1\cdot(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + 0 + 2\cdot(-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= (-2\cdot 3 - 3\cdot(-1)) - 2(2\cdot 3 - 1\cdot 2) \\ &= -11.\end{aligned}$$

(c) Mit den Rechenregeln für Determinanten und Aufgaben 3a) und 3b) folgt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 110.$$

(d) Es gilt

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die gesuchte Determinante z.B. mit der Regel von Sarrus

$$\det(A+B) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot 6 + 0 + 0 - 0 - 3\cdot 2\cdot 1 - 0 = 6 - 6 = 0.$$

(e) Mit den Rechenregeln für Determinanten und der Aufgabe 3d) folgt

$$\det\left((A+B)^2\right) = \det(A+B)\cdot\det(A+B) = 0.$$

(f) Wir rechnen

$$\begin{aligned}\det(AB - BA) &= \det\left(\begin{pmatrix} -5 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ -2 & 0 & -4 \\ -8 & 6 & 0 \end{pmatrix} \\ &\overset{(*)}{=} 0 + 3\cdot(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} + 9\cdot(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \\ &= -3(-2\cdot 0 - 8\cdot 4) + 9(-2\cdot 6 + 8\cdot 0) \\ &= -12,\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ nach der ersten Zeile entwickelt haben.

# 2. Aufgabe

(a) Die Determinante können wir beispielsweise mit der Regel von Sarrus berechnen und zwar,

$$\det(A_a) = \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix} = a^2+1+1-a-1-a = a^2-2a+1.$$

Somit gilt $\det(A_a)=1$ genau dann, wenn $a^2-2a = a(a-2)=0$. Zusammengefasst ist $\det(A_a)=1$ für

$$a_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad a_2 = 2.$$

(b) Die Determinante können wir beispielsweise durch Entwicklung nach der ersten Zeile berechnen und zwar,

$$\begin{aligned}
\det(B_\lambda) &= \det\begin{pmatrix}3-\lambda & 1 & 2\\ 1 & 3-\lambda & -1\\ 2 & -1 & 3-\lambda\end{pmatrix}\\
&= (3-\lambda)\cdot(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3-\lambda\end{pmatrix}\\
&\quad + 2\cdot(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix}1 & 3-\lambda\\ 2 & -1\end{pmatrix}\\
&= (3-\lambda)((3-\lambda)^2-1) - (3-\lambda+2) + 2(-1-2(3-\lambda))\\
&= (3-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8) + 5\lambda - 19\\
&= -\lambda^3+9\lambda^2-21\lambda+5.
\end{aligned}$$

Das heisst, $\det(B_\lambda)$ ist ein Polynom dritten Grades und die gesuchten Werte von $\lambda$ sind einfach die Nullstellen des Polynoms. Durch Raten findet man die Nullstelle $\lambda_1 = 5$. Wir können also schreiben

$$-\lambda^3+9\lambda^2-21\lambda+5 = (\lambda-5)(a\lambda^2+b\lambda+c).$$

Die Koeffizienten finden wir durch Ausmultiplizieren (oder mit Polynomdivision) und zwar,

$$-\lambda^3+9\lambda^2-21\lambda+5 = a\lambda^3+(b-5a)\lambda^2+(c-5b)\lambda-5c.$$

Somit sind $a=-1$, $b=4$ und $c=-1$. Das heisst

$$-\lambda^3+9\lambda^2-21\lambda+5 = (\lambda-5)(-\lambda^2+4\lambda-1).$$

Die Nullstellen von $-\lambda^2+4\lambda-1$ sind

$$\lambda_{2,3} = \frac{-4\pm\sqrt{12}}{-2} = 2\mp\sqrt{3}.$$

Daher gilt $\det(B_\lambda)=0$ falls $\lambda=5$, $\lambda = 2-\sqrt{3}$ oder $\lambda = 2+\sqrt{3}$.

# 3. Aufgabe (Prüfung Sommer 2017)

Die Determinante kann zum Beispiel durch Entwickeln nach der dritten Spalte und anschliessender Anwendung der Sarrus-Regel berechnet werden. Es folgt

$$\det\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 1\\ 2 & -2 & 0 & -2\\ 4 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = -3\det\begin{pmatrix}-3 & 2 & 3\\ 2 & -2 & -2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix} = -3(-16+6+24-6) = -24.$$

# Multiple Choice

**1. Ergebnis:** (c).

Es gilt

$$\begin{aligned}
BC &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = A,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq A.
\end{aligned}$$

**2. Ergebnis:** (b).

Das erste Ergebnis ist falsch, da die Matrix $(5A - B) + 3C$ eine $(2 \times 4)$-Matrix ist und $A$ eine $(4 \times 2)$-Matrix ist. Der dritte Ausdruck ist nicht wohldefiniert, da $\left((5A - B)^\top\right)^\top \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $3C^\top \in \mathbb{R}^{4\times 2}$. Schliesslich haben wir

$$\begin{aligned}
(5A - B)^\top + 3C^\top &= \begin{pmatrix} 0 & 7 & 15 & 9 \\ -2 & 24 & -15 & 34 \end{pmatrix}^\top + 3 \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -6 \end{pmatrix}^\top \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 7 & 24 \\ 15 & -15 \\ 9 & 34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 9 & 3 \\ 9 & -3 \\ 15 & -18 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 16 & 27 \\ 24 & -18 \\ 24 & 16 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$