Lösung 16

1. Aufgabe

Um das Produkt zweier Matrizen bilden zu können, muss die Anzahl Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl Zeilen der zweiten Matrix sein. Wir können somit folgende Produkte bilden:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -15 \\ 6 & 12 & -9 \\ -4 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 21 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \end{pmatrix} = 28.$$

2. Aufgabe (Prüfung Winter 2016)

Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2(2\lambda - 3) + 2 \cdot 2 = -4\lambda + 7.$$

Daher ist die Matrix für $\lambda \neq \frac{7}{4}$ invertierbar.

3. Aufgabe (Prüfung Winter 2018)

Rechnet man das Matrixprodukt $C \cdot C^{-1}$ aus, erhält man

$$C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} -6 + 3x + y & 0 & 0 \\ 3 - x - y & 1 & 0 \\ -9 + 4x + y & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

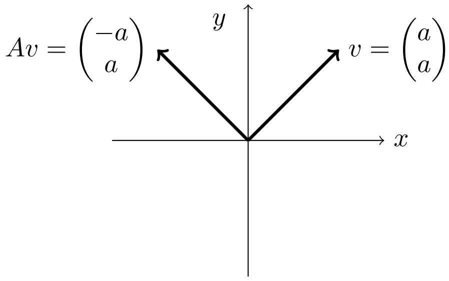
Damit C^{-1} wirklich die Inverse ist, muss das Produkt die Identitätsmatrix sein. Also muss gelten

$$\begin{cases} -6 + 3x + y &= 1 \\ 3 - x - y &= 0 \\ -9 + 4x + y &= 0 \end{cases}$$

Die ersten beiden Gleichungen zusammen addiert liefern $-3 + 2x = 1$, also $x = 2$. Eingesetzt in die erste Gleichung folgt $y = 1$. Zur Kontrolle kann man $x = 2$ und $y = 1$ in die dritte Gleichung einsetzen und erhält $0 = 0$.

4. Aufgabe (Prüfung Sommer 2018)

(a) $A = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und darum $Av = \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}$. Auf der Abbildung:



(b) Die Matrix B entspricht der Drehung um φ in die positive Richtung. Von der Abbildung liest man dann $\varphi = \dfrac{5}{4}\pi$ ab.

(c) Es gilt $\det(EF) = \det(E)\det(F) = 2b$. Daher muss b gleich 1009 sein.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (c).

Es gilt mit Entwicklung nach der 1. Spalte

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\\ &= 1\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\\ &= 2.\end{aligned}$$

Ferner gilt mit Entwicklung nach der 1. Spalte

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}\\ &= 2\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 4\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}\\ &= 12.\end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$\det(BA) = \det(B)\det(A) = 12\cdot 2 = 24.$$

2. Ergebnis: (a).

Es gilt

$$\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix}7 & 8 & 9\\ 10 & 10 & 10\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2.$$

Daher ist A nicht invertierbar. Ferner hat die Matrix

$$B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Rang 1, was zeigt, dass der Rang einer Dreiecksmatrix nicht gleich der Anzahl der von 0 verschiedenen Diagonalelemente ist.