# Lösung 17

## 1. Aufgabe

Als erstes schreiben wir die angegebenen Gleichungssysteme in der Matrixform $(A|c)$. Mit dem Gauss-Verfahren formen wir diese dann in ein äquivalentes Gleichungssystem $(A^*|c^*)$ in Trapezform um. An der Trapezform können wir das Lösungsverhalten untersuchen und anschliessend das Gleichungssystem sukzessive von unten nach oben lösen.

(a) Es gilt

$$(A|c) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 8 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3-8Z_1]{Z_2+3Z_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 8 \\ 0 & -10 & -18 & 2 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+2Z_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 8 \end{array}\right) = (A^*|c^*)$$

Daher erhalten wir $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|c) = 3$. Da es sich um ein $(3,4)$-System handelt, existieren also unendlich viele Lösungen mit $4-3=1$ Parameter. Wir wählen $x_4 = t \in \mathbb{R}$ als Parameter und rechnen von unten nach oben

$$x_3 = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3}t, \qquad x_2 = \frac{16}{5} - t, \qquad x_1 = \frac{7}{15} - \frac{1}{3}t.$$

(b) Die Matrix $A$, die mit diesem Gleichungssystem verbunden ist, ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt

$$(A|c) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{Z_3-5Z_1 \\ Z_4-2Z_1}]{Z_2+2Z_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 7 & -6 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3+3Z_2]{Z_4-2Z_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_4-\frac{1}{4}Z_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) = (A^*|c^*)$$

Daher erhalten wir $\mathrm{Rg}(A) = 3 \neq \mathrm{Rg}(A|c) = 4$. Das System besitzt also keine Lösungen.

(c) Es gilt

$$(A|c) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 5 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 4 & 2 & -16 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3+4Z_2]{Z_1+2Z_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 21 & 15 & -8 & -27 \\ -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 34 & 16 & -6 & -52 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 21 & 15 & -8 & -27 \\ 0 & 34 & 16 & -6 & -52 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2-21Z_4]{Z_3-34Z_4} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & -6 & 76 & -6 \\ 0 & 0 & -18 & 130 & -18 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \leftrightarrow Z_4]{Z_3 \leftrightarrow Z_4} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 76 & -6 \\ 0 & 0 & -18 & 130 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_4-3Z_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 76 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -98 & 0 \end{array}\right) = (A^*|c^*)$$

Daher erhalten wir $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|c) = 4$. Da es sich um ein $(4,4)$-System handelt, existiert also genau eine Lösung. Wir rechnen von unten nach oben

$$x_4 = 0, \qquad x_3 = 1, \qquad x_2 = -2, \qquad x_1 = 5.$$

(d) Die Matrix $A$, die mit diesem Gleichungssystem verbunden ist, ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt

$$(A|c) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 + 2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A^*|c^*)$$

Daher erhalten wir $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A|c) = 2$. Da es sich um ein $(3,3)$-System handelt, existieren also unendlich viele Lösungen mit $3 - 2 = 1$ Parameter. Wir wählen $x_3 = t \in \mathbb{R}$ als Parameter und rechnen von unten nach oben

$$x_2 = -3t, \qquad x_1 = 3t.$$

# 2. Aufgabe

Wir berechnen das Produkt der beiden Matrizen und erhalten

$$\begin{aligned} BA &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_2. \end{aligned}$$

# 3. Aufgabe

(a) Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \lambda[2(\lambda - 1) + 2 \cdot 3] + 1[0 \cdot 3 - 1 \cdot (\lambda - 1)] = 2\lambda^2 + 3\lambda + 1.$$

Es folgt

$$\det(A) = 0 \iff \lambda = -1 \text{ oder } \lambda = -\frac{1}{2}.$$

(b) (i) Die lineare Gleichung $Ax = 0$ ist genau dann nur trivial lösbar, wenn $\det(A) \neq 0$, beziehungsweise $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$ ist.

(ii) Die lineare Gleichung $Ax = 0$ besitzt genau dann nichttriviale Lösungen, wenn $\lambda \in \{-1, -\frac{1}{2}\}$ ist. Anwendung des Gauss-Verfahrens liefert nämlich im Falle $\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3+Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3+1.5Z_2]{(-0.5)\cdot Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = z, \\ y = -z, \\ z \text{ beliebig}, \end{cases}$$

und im Falle $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3+2Z_1]{(-2)\cdot Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3-Z_2]{(-2)\cdot Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2z, \\ y = -\frac{4}{3}z, \\ z \text{ beliebig}. \end{cases}$$

(c) Dies ist der Fall genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$, beziehungsweise, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$ gilt.

(d) Unabhängig von $\lambda$ ist

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

stets eine Lösung von $Ax = b$. Dies lässt sich vermuten, indem man bemerkt, dass die letzte Spalte der Matrix $A$ dem Vektor $-b$ entspricht.

- Im Falle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$ sind dies bereits alle Lösungen da $\det(A) \neq 0$ und $x = A^{-1}b$.
- Im Falle $\lambda = -1$ haben wir gesehen, dass die Lösung von $Ax = 0$ wie folgt geschrieben werden kann (vgl. (b))

$$\begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Daher besitzt jede Lösung $x_{-1}$ von $Ax = b$ die Form

$$x_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

- Im Falle $\lambda = -\frac{1}{2}$ haben wir gesehen, dass die Lösung von $Ax = 0$ wie folgt geschrieben werden kann (vgl. (b))

$$\begin{pmatrix} 2t \\ -\frac{4}{3}t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Daher besitzt jede Lösung $x_{-1/2}$ von $Ax = b$ die Form

$$x_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ -\frac{4}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -\frac{4}{3}t \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Alternativ ist es möglich, das Gauss-Verfahren zu verwenden, um die oben genannten Lösungen zu finden.

# 4. Aufgabe

Die fraglichen Gleichungssysteme $Ax = 0$ sind homogen und quadratisch. Somit besitzen sie genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn die Determinante der gegebenen Matrix verschwindet (ist die Determinante ungleich null, dann wäre die einzige Lösung die triviale).

(a) Hier gilt

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{pmatrix} = -2\lambda^2 - 1.$$

Also ist $\det(A) = 0$ genau dann, wenn $\lambda = \frac{i}{\sqrt{2}}$ oder $\lambda = -\frac{i}{\sqrt{2}}$.

(b) Die Determinante ist

$$\det \begin{pmatrix} 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (2+\lambda)(2-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2+1),$$

wobei wir zweimal nach der ersten Zeile entwickelt haben. Also hat das Gleichungssystem nicht-triviale Lösungen genau dann, wenn $\lambda = \pm 2$ oder $\lambda = \pm i$.

# Multiple Choice

**1. Ergebnis:** (d).

Eine quadratische Matrix $M$ ist invertierbar, genau dann wenn $\det(M) \neq 0$. Hier haben wir

$$\det(A) = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -2, \quad \det(B) = 2 - 1 = 1 \quad \text{und} \quad \det(C) = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1.$$

Daher sind $A, B$ und $C$ invertierbar. Es gilt aber

$$\det(D) = (\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) - 1 = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) - 1 = 0,$$

was zeigt, dass $D$ nicht invertierbar ist.

**2. Ergebnis:** (b).

Es gilt

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 - 2Z_1]{Z_2 + Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $\operatorname{Rang}(M) = 1$.