Mathematik II
Prof. Dr. E. W. Farkas
Selim Gatti

Lösung 18

1. Aufgabe

(a) Wir führen im Gaussverfahren an der erweiterten Matrix $(A|b)$ folgende elementare Zeilenumformungen:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & -4 & 5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -7 & -5+s \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{Z_3+2Z_1 \\ Z_5+Z_1}]{Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -7 & -5+s \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -7 & -5+s \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_5+4Z_3]{Z_4-5Z_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 3 & s \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_5-Z_2]{Z_4+Z_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1+s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A^*|b^*).$$

Wir sehen sofort, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist, falls $s \neq 1$. Im Fall $s = 1$ lösen wir das Gleichungssystems von unten nach oben. Die dritte Zeile liefert

$$x_4 - 2x_5 = -1 \implies x_4 = -1 + 2t, \quad x_5 = t \in \mathbb{R}.$$

und somit $x_5 = t \in \mathbb{R}$ und $x_4 = -1 + 2t$. Die zweite Zeile ist dann

$$2x_3 + 3(-1 + 2t) - 3t = -1 \implies x_3 = 1 - \frac{3}{2}t.$$

Die erste Zeile umgeformt ist dann

$$2x_1 - x_2 = -6 + \frac{11}{2}t.$$

Sei also $x_2 = r \in \mathbb{R}$. Dann ist $x_1 = -3 + \frac{11}{4}t + \frac{1}{2}r$. Die Lösungsmenge ist also in diesem Fall

$$x = \begin{pmatrix} -3 + \frac{11}{4}t + \frac{1}{2}r \\ r \\ 1 - \frac{3}{2}t \\ -1 + 2t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } t, r \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

(b) Aus Teilaufgabe (a) wissen wir, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ entweder keine Lösung (falls $s \neq 1$) oder unendlich viele Lösungen (falls $s = 1$) besitzt. Da es sich um ein inhomogenes quadratisches Gleichungssystem handelt, folgt sofort (und ohne Rechnung) $\det(A) = 0$.

2. Aufgabe (Prüfung Sommer 2022)

(a) Ausrechnen mit Sarrus oder Laplace ergibt $\det(D_b) = 2b + 18$.

(b) Wir verwenden, dass D_b invertierbar ist genau dann wenn die Determinante $\neq 0$ ist. Daher folgt aus (a), dass D_b invertierbar ist für $b \in \mathbb{R} \setminus \{-9\}$.

(c) Ein homogenes LGS hat immer die triviale Lösung $x = 0$, also gibt es für jedes $b \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

3. Aufgabe

Wir berechnen nur durch Zeilenoperationen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 - 2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2t & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2t & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2t & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 + 2t/(1+2t) Z_3]{Z_1 - t/(1+2t) Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1+2t} & \frac{t}{1+2t} & \frac{-t}{1+2t} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{1+2t} & \frac{1}{1+2t} & \frac{2t}{1+2t} \\ 0 & 0 & 1+2t & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3/(1+2t)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1+2t} & \frac{t}{1+2t} & \frac{-t}{1+2t} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{1+2t} & \frac{1}{1+2t} & \frac{2t}{1+2t} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1+2t} & \frac{-1}{1+2t} & \frac{1}{1+2t} \end{array}\right).$$

Auf der linken Seite haben wir die Matrix A zur Einheitsmatrix umgeformt. Auf der rechten Seite steht jetzt anstatt der Einheitsmatrix die Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+2t} & \frac{t}{1+2t} & \frac{-t}{1+2t} \\ \frac{-2}{1+2t} & \frac{1}{1+2t} & \frac{2t}{1+2t} \\ \frac{2}{1+2t} & \frac{-1}{1+2t} & \frac{1}{1+2t} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix existiert nur für $t \neq -1/2$. Daher ist die Matrix A für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ invertierbar.

Bemerkung: Dieses Verfahren zur Bestimmung der Inversen funktioniert nur, wenn die Matrix, die zu Beginn auf der linken Seite steht, invertierbar ist. Wäre die Matrix nicht invertierbar, dann könnte das Gauss-Verfahren nicht zur Einheitsmatrix führen.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (c).

Es gilt

$$\det(A) = 9x + 84 + 96 - 21x - 48 - 72 = 60 - 12x.$$

Für $\det(A) = 0$ muss daher $x = 5$ sein.

2. Ergebnis: (c).

Es gilt

$$M = AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$