Lösung 19

1. Aufgabe

(a) Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und hier die Lösungen der Gleichung

$$(\sqrt{3}-\lambda)^2+1=\lambda^2-2\sqrt{3}\lambda+4=0.$$

Damit erhalten wir:

Kartesisch: $\lambda_1=\sqrt{3}+i, \quad \lambda_2=\overline{\lambda_1}=\sqrt{3}-i.$
Polar: $\lambda_1=2e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad \lambda_2=\overline{\lambda_1}=2e^{-i\frac{\pi}{6}}.$

(b) Damit v ein Eigenvektor von B ist, muss gelten

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i\sqrt{3}-b \\ i+\sqrt{3}b \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} i \\ b \end{pmatrix},$$

mit $\lambda=\lambda_1$ oder $\lambda=\lambda_2$ aus (a). Setzen wir λ_1 ein, folgt $b=1$. Setzen wir λ_2 ein, folgt $b=-1$. Da nach Annahme $b>0$, ist der gesuchte Vektor somit $v=\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von B zum Eigenwert λ_1.

(c) Damit w ein Eigenvektor von B ist, muss gelten

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -i\sqrt{3}-y \\ -i+\sqrt{3}y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} -i \\ y \end{pmatrix},$$

mit $\lambda=\lambda_1$ oder $\lambda=\lambda_2$ aus (a). Setzen wir λ_1 ein, folgt $y=-1$. Setzen wir λ_2 ein, folgt $y=1$. In Frage kommen also die Vektoren $\binom{-i}{-1}$ als Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 und $\binom{-i}{1}$ als Eigenvektor zum Eigenwert λ_2. Da Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten linear unabhängig sind und hier $\lambda_1\neq\lambda_2$ ist hier $v=\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $y=1$.

2. Aufgabe

(a) Wir berechnen mit dem Gaussverfahren

$$(A|0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & v+8 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[Z_4-Z_1]{Z_3-2Z_1}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & v+9 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[Z_4+Z_3]{Z_3+2Z_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & v+10 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{Z_4-2Z_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \end{array}\right)$$

Somit gibt es eine eindeutige Lösung oder unendlich viele Lösungen, je nachdem ob $v\neq 0$ oder $v=0$ (in der Tat ist $\det(A)=v$ wie man nachrechnen kann).

- Falls $v\neq 0$ ist die eindeutige Lösung die triviale

$$x=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Falls $v = 0$ lösen wir das Gleichungssystems von unten nach oben. Die dritte Zeile liefert

$$-x_3 + 5x_4 = 0 \implies x_4 = t, \quad x_3 = 5t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die zweite Zeile ist dann

$$-x_2 + 2t = 0 \implies x_2 = 2t.$$

Schliesslich ist $x_1 = -9t$. Die Lösungsmenge ist also in diesem Fall

$$x = \begin{pmatrix} -9t \\ 2t \\ 5t \\ t \end{pmatrix}, \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

(b) Die genau gleichen Zeilenumformungen wie in Teilaufgabe (a) können wir für das Lösen des Systems $Ax = b$ brauchen. Wir müssen nur daran denken, jeweils auch die Spalte b in der erweiterten Matrix $(A|b)$ umzuformen. Man erhält auf diese Weise

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & w \\ 1 & -2 & 1 & v+8 & 3 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & w \\ 0 & 0 & 0 & v & -w \end{array}\right) = (A^*|b^*).$$

- Falls $v \neq 0$ gibt es eine eindeutige Lösung und zwar von unten nach oben gelöst

$$x = \begin{pmatrix} 1 + 2w + 9w/v \\ -1 - 2w/v \\ -w - 5w/v \\ -w/v \end{pmatrix}.$$

- Falls $v = 0$ hängt die Lösbarkeit von w ab. Falls $v = 0$ und $w \neq 0$ ist das Gleichungssystem nicht lösbar.
- Falls $v = 0$ und $w = 0$ lösen wir das Gleichungssystem von unten nach oben. Die dritte Zeile liefert

$$-x_3 + 5x_4 = 0 \implies x_4 = t, \quad x_3 = 5t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die zweite Zeile ist dann

$$-x_2 + 2t = 1 \implies x_2 = 2t - 1.$$

Schliesslich ist $x_1 = 1 - 9t$. Die Lösungsmenge ist also in diesem Fall

$$x = \begin{pmatrix} 1 - 9t \\ 2t - 1 \\ 5t \\ t \end{pmatrix}, \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

3. Aufgabe

Das charakteristische Polynom von B ist

$$\det(B-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}5-\lambda & 4 & 2\\ 4 & 5-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 2-\lambda\end{pmatrix}=\ldots=-(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

Die Matrix B hat also den doppelten Eigenwert 1 und den einfachen Eigenwert 10. Einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 finden wir mit Zeilenoperationen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 0\\ 4 & 4 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[Z_3-1/2Z_1]{Z_2-Z_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Der Rang dieser Matrix ist 1, also ist der Eigenraum zweidimensional. Wir erhalten somit den Eigenvektor

$$x_1=\begin{pmatrix}t\\ s\\ -2t-2s\end{pmatrix},\qquad s,t\in\mathbb{R}.$$

Beachten Sie, dass zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Beispiel gegeben sind durch

$$x_{1,1}=\begin{pmatrix}t\\ 0\\ -2t\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},\qquad x_{1,2}=\begin{pmatrix}0\\ s\\ -2s\end{pmatrix},\quad s\in\mathbb{R}.$$

Ferner finden wir einen Eigenvektor zum Eigenwert 10 mit Zeilenoperationen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & 2 & 0\\ 4 & -5 & 2 & 0\\ 2 & 2 & -8 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[Z_3+2/5Z_1]{Z_2+4/5Z_1}\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & 2 & 0\\ 0 & -\frac{9}{5} & \frac{18}{5} & 0\\ 0 & \frac{18}{5} & -\frac{36}{5} & 0\end{array}\right)\xrightarrow{Z_3+2Z_2}\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & 2 & 0\\ 0 & -\frac{9}{5} & \frac{18}{5} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Damit ist der Eigenvektor zum Eigenwert 10 gegeben durch

$$x_{10}=\begin{pmatrix}2t\\ 2t\\ t\end{pmatrix},\qquad t\in\mathbb{R}.$$

4. Aufgabe (Prüfung Sommer 2022)

(a)

$$\det(A) = \mu - 1.$$

(b)

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & 7 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir führen Zeilenoperationen durch:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3-2Z_1]{Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3-Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wählen wir $x_3 = t \in \mathbb{R}$ als freien Parameter, so ergibt sich $x_2 = 1 + 3x_3 = 1 + 3t$ und $x_1 = 1 - x_3 = 1 - t$. Die gesuchten Lösungen sind daher

$$x = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+3t \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(d) Das charakteristische Polynom von B ist

$$\det(B - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 4 & 2 \\ 5 & -9-\lambda & -5 \\ 3 & -5 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \ldots = -\lambda^2(\lambda + 14).$$

Die Matrix B hat also den doppelten Eigenwert 0 und den einfachen Eigenwert -14. Einen Eigenvektor zum Eigenwert 0 finden wir mit Zeilenoperationen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & -9 & -5 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2+Z_1-Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1+Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3-3Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Daraus ergibt sich $x_3 = t \in \mathbb{R}$, $x_2 = 0$ und $x_1 = x_2 + x_3 = t$. Der Eigenvektor ist also

$$x = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Normiert ist dieser Vektor wenn $1 = \|x\| = \sqrt{t^2 + t^2}$, also wenn $t = \pm 1/\sqrt{2}$.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (a).

Die Aussage (a) ist falsch, da die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ einen doppelten Eigenwert $\lambda = 1$ besitzt. Die Aussage (b) ist wahr. Um dies zu sehen, multiplizieren wir die Gleichung $Ax = \lambda x$ auf beiden Seiten mit A^{-1}:

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}\lambda x.$$

Vereinfacht wird dies $x = A^{-1}\lambda x$. Wenn wir noch λ auf die linke Seite bringen, erhalten wir $\frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x$. Die Aussage (c) ist wahr, da die Diagonaleinträge einer Diagonalmatrix die Eigenwerte dieser Matrix sind. Wenn 0 dabei ist, ist das Produkt der Diagonaleinträge gleich Null. Dieses Produkt ist hier die Determinante der Matrix, also 0, und damit ist die Matrix nicht invertierbar.

2. Ergebnis: (b).

Das lineare Gleichungssystem besitzt genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet. Es ist $\det\begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 4 & -2\lambda \end{pmatrix} = -2\lambda^2 - 8$ und die Gleichung $-2\lambda^2 - 8 = 0$ hat genau $\lambda = 2i$ oder $\lambda = -2i$ als Lösungen.