Lösung 21

1. Aufgabe

Die allgemeinen Lösungen finden wir jeweils mit dem Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$. Dies führt auf ein Polynom in λ dessen Grad mit der Ordnung der DGL übereinstimmt. Die Nullstellen hiervon sind die gesuchten Konstanten λ. Treten mehrfache Nullstellen auf, so muss der Ansatz entsprechend modifiziert werden, siehe (a) und (c).

(a) Hier ist $\lambda = -1$ eine doppelte Nullstelle. Demnach lautet die allgemeine Lösung der DGL

$$y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Die beiden Anfangsbedingungen werden erfüllt von der partikulären Lösung

$$y(x) = (1 + 2x)e^{-x}.$$

(b) Die Nullstellen sind $\lambda = 0$ und $\lambda = \pm i$. Daher ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = A + Be^{ix} + Ce^{-ix}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Die drei Anfangsbedingungen werden erfüllt von der partikulären Lösung

$$y(x) = 1.$$

(c) Die Nullstellen sind $\lambda = 0$ (doppelte Nullstelle) und $\lambda = \pm 2i$. Die allgemeine Lösung lautet folglich

$$y(x) = A + Bx + Ce^{2ix} + De^{-2ix}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Die vier Anfangsbedingungen werden erfüllt von der partikulären Lösung

$$y(x) = 3 - x - \frac{1}{2}\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) = 3 - x - \cos(2x).$$

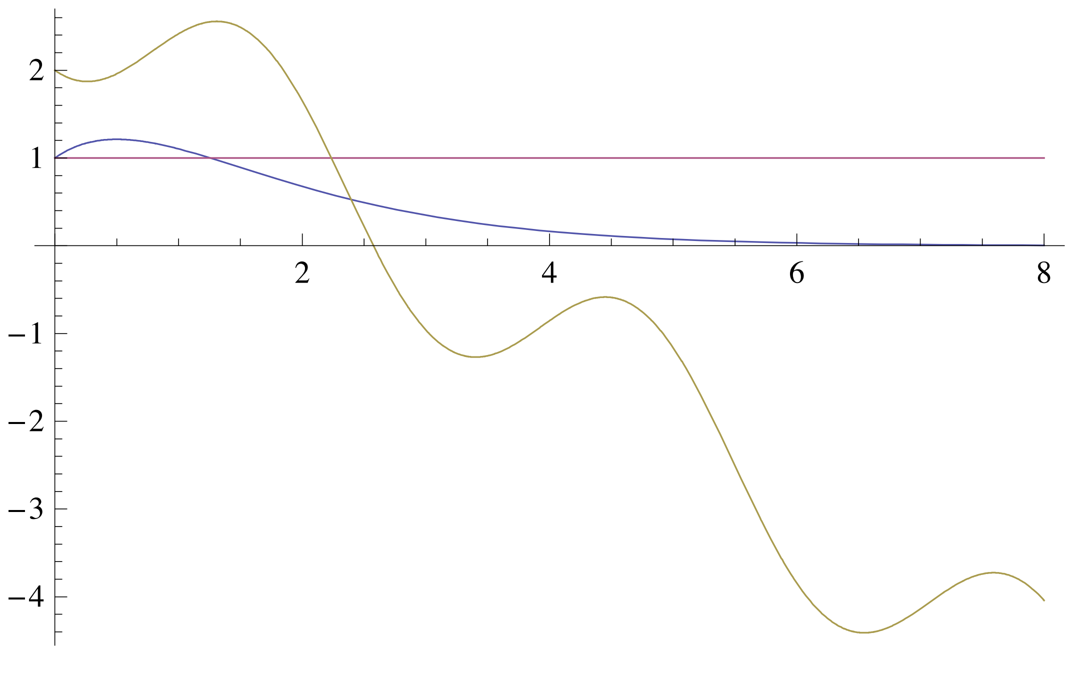

Abbildung: Graphen der Lösungen $y(x)$ der Anfangswertprobleme aus (a)-(c).

2. Aufgabe

(a) Die Differentialgleichung hat charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$ mit doppelter Nullstelle $\lambda_{1,2} = -2$. Somit ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Wir berechnen die Ableitung von $y(x)$:

$$y'(x) = \left((C_1 + C_2 x)e^{-2x}\right)' = e^{-2x}\left(C_2 - 2C_1 - 2C_2 x\right).$$

Die partikuläre Lösung erhalten wir, indem wir die Konstanten C_1, C_2 aus dem folgenden Gleichungssystem berechnen:

$$(C_1 + C_2 \cdot 0)e^{-2\cdot 0} = 1,$$
$$(C_2 - 2C_1 - 2C_2 \cdot 0)e^{-2\cdot 0} = 0,$$

oder vereinfacht

$$C_1 = 1,$$
$$(C_2 - 2C_1) = 0.$$

Das ergibt $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ und

$$y(x) = (1 + 2x)e^{-2x}.$$

3. Aufgabe

(a) Zuerst lösen wir die entsprechende homogene Differentialgleichung, d.h. $y'(x) - 2y(x) = 0$. Deren Lösung findet man mit der Methode der Trennung der Variablen und findet (siehe Vorlesung)

$$y(x) = K \exp\left(\int 2\,dx\right) = Ke^{2x}, \quad \text{mit } K \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = K(x)e^{2x},$$

wobei wir die Funktion $K(x)$ noch bestimmen müssen. Diesen Ansatz setzen wir in die inhomogene Differentialgleichung ein und erhalten

$$1 = y'(x) - 2y(x) = (K'(x)e^{2x} + 2K(x)e^{2x}) - 2K(x)e^{2x} = K'(x)e^{2x},$$

das heisst $K'(x)e^{2x} = 1$. Daraus folgt

$$K(x) = \int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Setzt man dieses $K(x)$ in den gewählten Ansatz ein, so folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = K(x)e^{2x} = Ce^{2x} - \frac{1}{2}, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

(b) Wir verfahren wie in Teilaufgabe (a). Die homogene Differentialgleichung ist $y'(x) + y(x) = 0$ mit Lösung

$$y(x) = K \exp\left(-\int 1\, dx\right) = Ke^{-x}, \quad \text{mit } K \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = K(x)e^{-x},$$

welchen wir in die inhomogene Differentialgleichung einsetzen

$$x = y'(x) + y(x) = (K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x}) + K(x)e^{-x} = K'(x)e^{-x}.$$

Wir haben also $K'(x) = xe^x$ und somit

$$K(x) = \int xe^x\, dx \overset{(*)}{=} xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante,}$$

wobei wir in $(*)$ partielle Integration gebraucht haben. Dieses $K(x)$ setzen wir in den gewählten Ansatz ein. Es folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = K(x)e^{-x} = Ce^{-x} + x - 1, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

(c) Die homogene Differentialgleichung lautet $y'(x) - y(x) = 0$ mit Lösung

$$y(x) = K \exp\left(\int 1\, dx\right) = Ke^{x}, \quad \text{mit } K \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = K(x)e^{x},$$

welchen wir in die inhomogene Differentialgleichung einsetzen

$$\sin(x) = y'(x) - y(x) = (K'(x)e^{x} + K(x)e^{x}) - K(x)e^{x} = K'(x)e^{x}.$$

Wir haben also $K'(x) = \sin(x)e^{-x}$ und somit

$$K(x) = \int \sin(x)e^{-x}\, dx.$$

Dieses Integral lösen wir mit zweimaliger partieller Integration

$$\begin{aligned} \int \sin(x)e^{-x}\, dx &= -\sin(x)e^{-x} + \int \cos(x)e^{-x}\, dx \\ &= -\sin(x)e^{-x} - \cos(x)e^{-x} - \int \sin(x)e^{-x}\, dx, \end{aligned}$$

also

$$K(x) = \int \sin(x)e^{-x}\, dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x) + \cos(x)) + C, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Dieses $K(x)$ setzen wir in den gewählten Ansatz ein. Es folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = K(x)e^{x} = Ce^{x} - \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x)), \quad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ergibt sich die Konstante $C = \frac{3}{2}$. Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = \frac{3}{2}e^{x} - \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x)).$$

Multiple Choice

1. Ergebnis: (b).

Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung der ersten und dritten Differentialgleichungen sind nicht 3 und 5. Ferner lautet die charakteristiche Gleichung der zweiten Differentialgleichung

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0.$$

Damit ist die allgemeine Lösung der DGL $y''(t) - 8y'(t) + 15y(t) = 0$ die gegebene Funktion.

2. Ergebnis: (d).

Aus $2 = y(0) = C - 2$ folgt $C = 4$. Daher ist

$$y\left(\frac{1}{3}\ln(4)\right) = 4e^{-\ln(4)} - 2 = 1 - 2 = -1.$$