Lösung 22

1. Aufgabe

(a) Mit der Ketten- und Produktregel folgt

$$\begin{aligned}
f_{1x}(x,y) &= y^{-3}(y^2+1)e^{x(y^2+1)}, \\
f_{1y}(x,y) &= -3y^{-4}e^{x(y^2+1)} + y^{-3}2xye^{x(y^2+1)} = y^{-4}(2xy^2-3)e^{x(y^2+1)}.
\end{aligned}$$

(b) Man beachte, dass $f_2(x,y) = e^{\ln(y^{2x+1})} = e^{(2x+1)\ln(y)}$. Dann bekommen wir mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}
f_{2x}(x,y) &= 2\ln(y)e^{(2x+1)\ln(y)} = 2\ln(y)y^{2x+1}, \\
f_{2y}(x,y) &= \frac{2x+1}{y}e^{(2x+1)\ln(y)} = (2x+1)y^{2x}.
\end{aligned}$$

(c) Wir berechnen mit der Ketten- und Produktregel

$$\begin{aligned}
f_{3x}(x,y) &= 3x^2\sin^2(xy^2) + 2x^3y^2\sin(xy^2)\cos(xy^2), \\
f_{3y}(x,y) &= 4x^4y\sin(xy^2)\cos(xy^2).
\end{aligned}$$

(d) Aufgrund der Ketten-, Produkt- und Quotientenregel gilt

$$\begin{aligned}
f_{4x}(x,y) &= \frac{\left[2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy)\right](x^2+y^2) - 2x^3\cos(xy)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{2xy^2\cos(xy) - x^2y(x^2+y^2)\sin(xy)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{xy\left[2y\cos(xy) - x(x^2+y^2)\sin(xy)\right]}{(x^2+y^2)^2}, \\
f_{4y}(x,y) &= \frac{-x^3\sin(xy)(x^2+y^2) - 2x^2y\cos(xy)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= -\frac{x^2\left[x\sin(xy)(x^2+y^2) + 2y\cos(xy)\right]}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

2. Aufgabe

(a) Diese Funktion ist nicht auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, da für den Definitionsbereich gelten muss: $y \neq 0$ und $x + \ln(y^2) \geq 0$.

(b) Diese Funktion ist nicht auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, da Nenner für $y = -x$ verschwindet. Die Funktion ist somit zum Beispiel im Punkt $(1,-1)$ nicht definiert.

(c) Diese Funktion ist nicht auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, da der Tangens an den Stellen $\ldots -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ nicht definiert ist. Die Funktion f ist somit zum Beispiel im Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0)$ nicht definiert.

(d) Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, da $x^2 + 2y^2$ für $x, y \in \mathbb{R}$ nie negativ wird und die Wurzel somit immer definiert ist.

3. Aufgabe

(a) Wegen

$$x^2 + y^2 + z - 4 = 0 \iff z = 4 - x^2 - y^2,$$

definieren wir eine Funktion g mit $g(x, y) = z = 4 - x^2 - y^2$. Die zu untersuchende Fläche betrachten wir als Graph von g über der xy-Ebene. Es gilt $g(1, 2) = -1$. Also liegt $(1, 2, -1)$ auf der Fläche. Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = g(x, y)$ im Punkt $(1, 2, -1)$ ist gegeben durch

$$z = g(1, 2) + g_x(1, 2)(x - 1) + g_y(1, 2)(y - 2).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= -2x, \quad g_x(1, 2) = -2, \\ g_y(x, y) &= -2y, \quad g_y(1, 2) = -4. \end{aligned}$$

Die Tangentialebene wird also durch

$$z = -1 - 2(x - 1) - 4(y - 2) = 9 - 2x - 4y$$

beschrieben, d.h. die gesuchte Tangentialebene ist die Fläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 9 - 2x - 4y\}.$$

(b) Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ ist gegeben durch

$$z = f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}, \quad f_x(1, 1) = 0, \\ f_y(x, y) &= \frac{-2xy}{(y^2 + x^2)^2}, \quad f_y(1, 1) = -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Tangentialebene ist damit gegeben durch

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - \tfrac{1}{2}y\}.$$

Multiple Choice

1. Ergebnis: (d).

Die Lösung ist (4). Um dies zu sehen, können wir zum Beispiel bemerken, dass

$$2 = f(1,0) = f(0,\sqrt{2}).$$

2. Ergebnis: (c).

Sei f eine stetige Funktion und a eine Konstante. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass die Funktion F mit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f ist. Es gilt also $F'(x) = f(x)$. Setze hier f als die Funktion $f(x) = \sin(x)$ und $a = 3$.

3. Ergebnis: (d).

Die Gleichung einer Höhenlinie berechnet sich mit $f(x,y) = c$, mit c konstant. Hier ist dies $x^2 = c$, also $x = \sqrt{c}$. Der Graph ist eine senkrechte Gerade durch $\sqrt{c}$ parallel zur y-Achse.