Lösung 23

1. Aufgabe

(a) Die Gleichung der Tangentialebene der Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt $(2, -2, 1/4)$ ist gegeben durch

$$z = f(2, -2) + \partial_x f(2, -2)(x - 2) + \partial_y f(2, -2)(y + 2).$$

Es gilt:

$$\partial_x f(2, -2) = \left.\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right|_{(x,y)=(2,-2)} = 0, \qquad \partial_y f(2, -2) = \left.\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right|_{(x,y)=(2,-2)} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}.$$

Die gesuchte Tangentialebene ist also die Fläche

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} y \right\}.$$

(b) Nach der Kettenregel ist (mit $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$)

$$\begin{aligned}
\partial_r F &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \\
&= \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \cos(\varphi) + \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \sin(\varphi) \\
&= \frac{-x^3 + xy^2 - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \\
&= -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\
&= -\frac{r\cos(\varphi)}{r^3} \\
&= -\frac{\cos(\varphi)}{r^2},
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\partial_\varphi F &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\
&= \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (-r\sin(\varphi)) + \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \cdot r\cos(\varphi) \\
&= \frac{x^2 y - y^3 - 2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= -\frac{y}{x^2 + y^2} \\
&= -\frac{r\sin(\varphi)}{r^2} \\
&= -\frac{\sin(\varphi)}{r}.
\end{aligned}$$

(c) Setzen wir die Parametergleichungen in die Funktionsgleichung ein, so erhalten wir

$$F(r, \varphi) = f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \frac{r\cos(\varphi)}{r^2} = \frac{\cos(\varphi)}{r},$$

und es folgt

$$\partial_r F = \frac{-\cos(\varphi)}{r^2}, \quad \partial_\varphi F = \frac{-\sin(\varphi)}{r}.$$

2. Aufgabe

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial_s F &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\\
&= (2xy+y^2)\cdot 1+(x^2+2xy)\cdot 1\\
&= 4xy+x^2+y^2.
\end{aligned}$$

Setze $G(s,t) = 4xy + x^2 + y^2 = g(x(s,t), y(s,t))$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\partial_{ss} F &= \partial_s G\\
&= \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\\
&= (4y+2x)\cdot 1+(4x+2y)\cdot 1\\
&= 6(x+y) = 12s,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzen, dass $x + y = 2s$. Analog folgt

$$\begin{aligned}
\partial_{st} F &= \partial_t G\\
&= \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\\
&= (4y+2x)\cdot 1+(4x+2y)\cdot(-1)\\
&= 2(y-x) = -4t,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\partial_t F &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\\
&= (2xy+y^2)\cdot 1+(x^2+2xy)\cdot(-1)\\
&= -x^2+y^2.
\end{aligned}$$

Setze $H(s,t) = -x^2 + y^2 = h(x(s,t), y(s,t))$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\partial_{tt} F &= \partial_t H\\
&= \frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\\
&= (-2x)\cdot 1+(2y)\cdot(-1)\\
&= -2(x+y) = -4s.
\end{aligned}$$

3. Aufgabe

Da $f(-x,-y) = f(x,y)$, ist mit jedem kritischen Punkt (x,y) auch $(-x,-y)$ ein kritischer Punkt derselben Art. Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x,y) = 2\begin{pmatrix} xe^{x^2+y^2} - 8x \\ ye^{x^2+y^2} - 4y \end{pmatrix}$$

mit Nullstellen bei

$$(x,y) \in \left\{(0,0), \left(0, \pm\sqrt{2\log(2)}\right), \left(\pm\sqrt{3\log(2)}, 0\right)\right\}.$$

Die Funktionswerte dort sind $f(0,0) = 1$, $f\left(0, \pm\sqrt{2\log(2)}\right) = 4-8\log(2)$ und $f\left(\pm\sqrt{3\log(2)}, 0\right) = 8-24\log(2)$. Die Hesse-Matrix von f lautet

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{yx} f \\ \partial_{xy} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} (1+2x^2)e^{x^2+y^2} - 8 & 2xye^{x^2+y^2} \\ 2xye^{x^2+y^2} & (1+2y^2)e^{x^2+y^2} - 4 \end{pmatrix}.$$

Speziell in den kritischen Punkten ist

$$\begin{aligned} H_f(0,0) &= \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \implies \Delta > 0,\ \partial_{xx} f(0,0) = -14 < 0, \\ H_f\left(0, \pm\sqrt{2\log(2)}\right) &= \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 32\log(2) \end{pmatrix} \implies \Delta < 0, \\ H_f\left(\pm\sqrt{3\log(2)}, 0\right) &= \begin{pmatrix} 96\log(2) & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \implies \Delta > 0,\ \partial_{xx} f(0,0) = 96\log(2) > 0. \end{aligned}$$

Im ersten Fall handelt es sich daher um ein Maximum, im zweiten um einen Sattelpunkt, im dritten um ein Minimum. Man beachte jedoch, dass beide Extrema nur lokal sind, da f weder nach oben noch nach unten beschränkt ist. Es gibt also weder ein globales Maximum noch ein globales Minimum.

4. Aufgabe

Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 4xy \\ 2x^2 + 6y \end{pmatrix}$$

mit Nullstellen bei

$$(x,y) = (0,0) \quad \text{und} \quad (x,y) = \left(\frac{9}{4}, -\frac{27}{16}\right).$$

Die Funktionswerte dort sind $f(0,0) = 0$ und $f\left(\frac{9}{4}, -\frac{27}{16}\right) = \frac{729}{256}$. Die Hesse-Matrix von f lautet

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + 4y & 4x \\ 4x & 6 \end{pmatrix}.$$

Speziell in den kritischen Punkten ist

$$\begin{aligned} H_f(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \implies \Delta = 0, \\ H_f\left(\frac{9}{4}, -\frac{27}{16}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{27}{4} & 9 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \implies \Delta < 0. \end{aligned}$$

In beiden Fällen handelt es sich um Sattelpunkte; im ersteren da f nahe bei $(0,0)$ sowohl Werte grösser als auch Werte kleiner als $f(0,0) = 0$ annimmt, im letzteren da die Diskrimante Δ negativ ist.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (b).

Es ist $\partial_x f(x,y) = u'(x)$, da y fest gehalten wird. Genauso

$$\partial_y f(x,y) = v'(y), \quad \partial_{yy} f(x,y) = v''(y) \quad \text{und} \quad \partial_{xx} f(x,y) = u''(x).$$

Das Beispiel $f(x,y) = \sin(x) + \cos(y)$ ist von der Form $f(x,y) = u(x) + v(y)$ und zeigt, dass die Ableitungen $\partial_{xx} f$ und $\partial_{yy} f$ nicht verschwinden müssen. Die erste und die dritte Antworten können wir also ausschliessen. Aber es ist

$$\partial_{xy} f(x,y) = 0 = \partial_{yx} f(x,y),$$

denn $\partial_x f(x,y) = u'(x)$ und $u'(x)$ hängt nur von x ab, also verschwindet die partielle Ableitung nach y.

2. Ergebnis: (b).

Falls es eine solche Funktion f gibt, gilt $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$. Es sind

$$\begin{aligned} \partial_x \varphi = \partial_y \varphi = \partial_y \psi &= 0, \\ \partial_x \psi = \partial_x \chi &= 2x, \\ \partial_y \chi &= 2y. \end{aligned}$$

Nur bei $\partial_x f = \psi$ und $\partial_y f = \varphi$ ist $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$, denn

$$\partial_{xy} f = \partial_y \psi = 0 = \partial_x \varphi = \partial_{yx} f.$$

Eine Lösung ist zum Beispiel $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + Cy$, für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. In den drei anderen Fällen gilt $\partial_{xy} f \neq \partial_{yx} f$.