Lösung 24

1. Aufgabe

(a) (i) Es gilt

$$\partial_x f(x,y) = 3y - 3x^2, \quad \partial_y f(x,y) = 3x - 3y^2.$$

Die notwendigen Bedingungen für kritische Punkte sind somit

$$\begin{aligned} 0 &= 3y - 3x^2, \\ 0 &= 3x - 3y^2. \end{aligned}$$

Es muss also gelten

$$\begin{aligned} y &= x^2, \\ x - y^2 &= 0, \end{aligned}$$

und damit löst x die Gleichung

$$0 = x - x^4 = x(1 - x^3).$$

Dies ergibt die kritischen Punkte $(0,0)$ und $(1,1)$. Mit

$$\partial_{xx} f(x,y) = -6x, \quad \partial_{xy} f(x,y) = 3 \quad \text{und} \quad \partial_{yy} f(x,y) = -6y,$$

erhalten wir

$$\Delta = \partial_{xx} f(x,y) \partial_{yy} f(x,y) - \partial_{xy} f(x,y)^2 = 36xy - 9.$$

Dies ergibt an der Stelle $(0,0)$

$$\Delta = 36 \cdot 0 \cdot 0 - 9 < 0,$$

und somit ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt. Weiter folgt an der Stelle $(1,1)$

$$\Delta = 36 \cdot 1 \cdot 1 - 9 = 27 > 0.$$

Nun gilt $\partial_{xx} f(1,1) = -6$ und damit ist $(1,1)$ ist ein lokales Maximum.

(ii) Wir berechnen die partiellen Ableitungen

$$\partial_x g(x,y) = y^2 + \sin(x), \quad \partial_y g(x,y) = 2xy,$$

und erhalten kritische Punkte durch

$$0 = y^2 + \sin(x), \quad 0 = 2xy.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, dass entweder x oder y Null sein muss. Für $x = 0$ liefert die erste Gleichung $y = 0$ und für $y = 0$ folgt $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Damit sind alle kritische Punkte gegeben durch

$$(x,y) = (k\pi, 0), \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Zur Bestimmung des Typs berechnen wir $\partial_{xx} g(x,y) = \cos(x)$, $\partial_{xy} g(x,y) = 2y$ und $\partial_{yy} g(x,y) = 2x$, und es folgt

$$\Delta = \partial_{xx} g(x,y) \partial_{yy} g(x,y) - \partial_{xy} g(x,y)^2 = 2x\cos(x) - 4y^2.$$

Im Punkt $(k\pi, 0)$ haben wir

$$\begin{aligned} d_k &:= \Delta = 2k\pi \cos(k\pi) \\ &= \begin{cases} 2k\pi, & \text{für } k \text{ gerade}, \\ 0, & \text{für } k = 0, \\ -2k\pi, & \text{für } k \text{ ungerade}. \end{cases} \end{aligned}$$

Das gibt folgende Fälle:

$$\begin{array}{lll l}
k>0 & \text{gerade} & \Rightarrow d_k>0,\ \partial_{xx}g(k\pi,0)=\cos(k\pi)=1>0\Rightarrow & \text{lokales Minimum,}\\
k>0 & \text{ungerade} & \Rightarrow d_k<0\Rightarrow & \text{Sattelpunkt,}\\
k=0 & & \Rightarrow d_k=0\Rightarrow & \text{keine Entscheidung möglich,}\\
k<0 & \text{gerade} & \Rightarrow d_k<0\Rightarrow & \text{Sattelpunkt,}\\
k<0 & \text{ungerade} & \Rightarrow d_k>0,\ \partial_{xx}g(k\pi,0)=-1<0\Rightarrow & \text{lokales Maximum.}
\end{array}$$

Schliesslich können wir sehen, dass der Punkt $(0,0)$ ein Sattelpunkt ist, da es für ε nahe bei 0 gilt

$$g(-\varepsilon^3,\varepsilon)=-\varepsilon^5-\cos(-\varepsilon^3).$$

Das bedeutet, dass für kleine negative $\varepsilon<0$ gilt

$$g(-\varepsilon^3,\varepsilon)>g(0,0)=-1,$$

und für kleine positive $\varepsilon>0$ gilt

$$g(-\varepsilon^3,\varepsilon)<g(0,0)=-1.$$

Das kann man in Abbildung 1 sehen, wo die Funktion $G(\varepsilon):=g(-\varepsilon^3,\varepsilon)$ dargestellt ist.

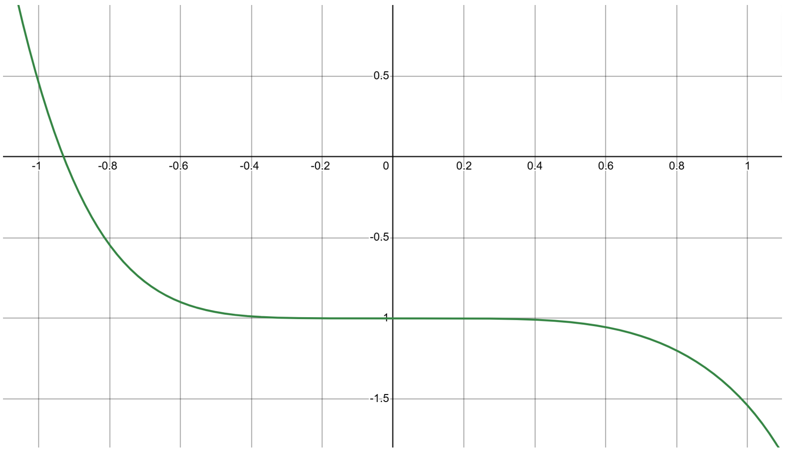
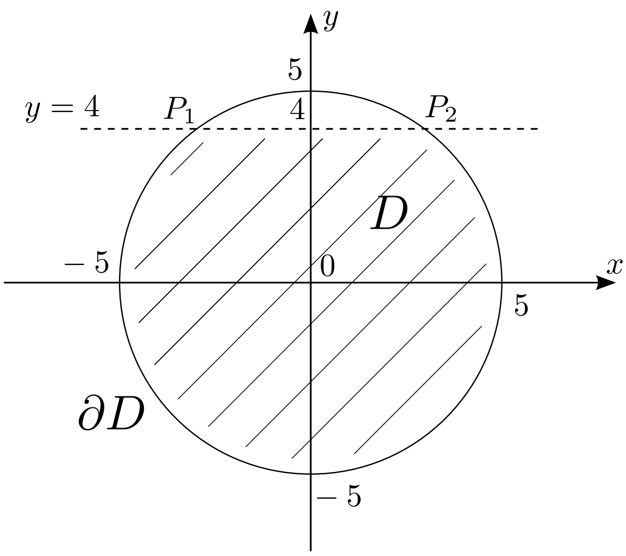


Abbildung 1: Graph der Funktion $G:[-1,1]\to\mathbb{R}$.

(b) Der Definitionsbereich besteht aus dem unteren abgeschnittenen Teil der Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius 5.



Die Extremalstellen innerhalb von D erfüllen

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -4x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y) = (0,0).$$

Um zu entscheiden, ob es Extrema auf dem Rand ∂D von D gibt, betrachten wir zunächst den Teil, der durch das Segment mit der Höhe $y = 4$ gegeben ist. Die Menge der Punkte auf diesem Segment ist

$$\overline{P_1P_2} = \left\{ (x,y) \in \partial D \subset \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in [-3,3]\,,\ y = 4 \right\}.$$

Hier betrachten wir als Einschränkung von f auf die Randkurve $\overline{P_1P_2}$ die Funktion g mit

$$g(x) = f(x,4) = -2x^2 + 15.$$

Dann ist g nicht konstant und somit nicht alle Randpunkte von $\overline{P_1P_2}$ Extrema. Um diese zu finden, rechnen wir

$$g'(x) = -4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$$

und da $g''(x) = -4 < 0$ für alle $x \in \overline{P_1P_2}$ gilt, ist $(x,y) = (0,4)$ ein lokales Maximum. Insbesondere ist $g(0) = f(0,4) = 15$.

Dann betrachten wir den Teil des Randes, der durch den unvollständigen Kreis um den Punkt $(0,0)$ mit Radius 5 gegeben ist. Um die Extremstellen auf diesem Rand zu bestimmen, verwenden wir die Lagrange-Multiplikatoren. Die Nebenbedingung ist durch die Gleichung des Kreises gegeben, also

$$\phi(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0.$$

Daher führen wir eine neue Funktion ein

$$\Lambda(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\,\phi(x,y),$$

und erhalten die folgenden Bedingungen

$$\begin{aligned}
&\partial_x \Lambda(x,y,\lambda) = -4x + 2\lambda x = 0 && \Longrightarrow \quad x(-4+2\lambda) = 0 && \Longrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = 2,\\
&\partial_y \Lambda(x,y,\lambda) = 2y + 2\lambda y = 0 && \Longrightarrow \quad y(2+2\lambda) = 0 && \Longrightarrow \quad y = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = -1,\\
&\partial_\lambda \Lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 25 = 0.
\end{aligned}$$

Setzen wir $\lambda = 2$, so folgt aus der zweiten Gleichung, dass $y = 0$ sein muss, und mit der dritten Gleichung ergibt sich

$$x^2 + y^2 - 25 = 0 \implies x^2 + 0^2 - 25 = 0 \implies x = \pm 5.$$

Setzen wir nun $\lambda = -1$, so muss gemäss der ersten Gleichung $x = 0$ gelten, und mit der dritten Gleichung ergibt sich

$$x^2 + y^2 - 25 = 0 \implies 0^2 + y^2 - 25 = 0 \implies y = \pm 5.$$

Unsere Kandidaten für Extremstellen sind also $(-5,0)$, $(5,0)$, $(0,-5)$, $(0,5)$. Dabei ist zu beachten, dass der letzte Punkt tatsächlich nicht auf dem Rand ∂D liegt. Daher müssen wir nur die drei übrigen Punkte berücksichtigen. Nach Einsetzen der gefundenen Extremalstellen und Vergleichen der Funktionswerte, das heisst,

$$f(\pm 5,0) = -51, \quad f(\pm\,3,4) = -3, \quad f(0,0) = -1, \quad f(0,4) = 15 \quad \text{und} \quad f(0,-5) = 24,$$

sehen wir, dass die gegebene Funktion

- ein globales Maximum bei $(0,-5)$ mit $f(0,-5) = 24$, und
- zwei globale Minima bei $(\pm\,5,0)$ mit $f(\pm\,5,0) = -51$

besitzt.

2. Aufgabe

Der Abstand des Punktes (x, y, z) vom Ursprung ist genau dann minimal, wenn das Quadrat $x^2 + y^2 + z^2$ des Abstands minimal ist. Wir haben also die Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

zu minimieren und zwar unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = 2x + 3y + z - 14 = 0.$$

Wir wollen einen Lagrangemultiplikator verwenden. Dazu sei Λ die Funktion

$$\Lambda(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z).$$

Jetzt müssen wir kritische Punkte von Λ finden. Es gilt

$$\nabla\Lambda(x, y, z, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x + 2\lambda \\ 2y + 3\lambda \\ 2z + \lambda \\ 2x + 3y + z - 14 \end{pmatrix}.$$

Dieser Gradient ist gleich Null wenn $x = -\lambda$, $y = -3\lambda/2$, $z = -\lambda/2$ und

$$0 = 2x + 3y + z - 14 = -2\lambda - 9\lambda/2 - \lambda/2 - 14 = -7\lambda - 14.$$

Daraus ergibt sich $\lambda = -2$, $x = 2$, $y = 3$ und $z = 1$. Insbesondere gibt es nur einen kritischen Punkt $P = (2, 3, 1)$. Da die Funktion f die Abstandsfunktion (im Quadrat) ist, kann dieser nur ein Minimum sein.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (c).

Die Steigung der in impliziter Form gegebenen Kurve $F(x,y) = x^2 - 3y^2 - 1 = 0$ im Kurvenpunkt (x_0, y_0) ist mit impliziter Differentiation

$$y'(x_0, y_0) = -\frac{\partial_x F(x_0, y_0)}{\partial_y F(x_0, y_0)}.$$

Einsetzen liefert

$$y'(x_0, y_0) = -\frac{2x_0}{-6y_0} = \frac{2x_0}{6y_0}.$$

2. Ergebnis: (b).

Es ist

$$\int_0^1 \int_0^y x \, dxdy = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=y} \right) dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \, dy = \frac{y^3}{6} \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{6}.$$

Die drei anderen Integrale sind jeweils $\frac{1}{3}$. Zum Beispiel:

$$\int_0^1 \int_0^y y \, dxdy = \int_0^1 \left(yx \,\big|_{x=0}^{x=y} \right) dy = \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{y^3}{3} \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3}.$$