Lösung 25

1. Aufgabe

(a)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^x \int_{-y^2}^{x^2} (1+x)\, dzdydx &= \int_0^1 \int_0^x \left[(1+x)z\right]_{z=-y^2}^{z=x^2} \, dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^x (1+x)(x^2+y^2)\, dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^x \left(x^2+x^3+y^2+xy^2\right)\, dydx \\
&= \int_0^1 \left[x^2y + x^3y + \frac{y^3}{3} + \frac{xy^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x} dx \\
&= \int_0^1 \left(x^3 + x^4 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{15}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} \\
&= \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_{y^2}^{y} \sin(x) yz\, dzdydx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \left[\sin(x) y \cdot \frac{z^2}{2}\right]_{z=y^2}^{z=y} dydx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sin(x) y \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{2}\right) dydx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sin(x) \left(\frac{y^3}{2} - \frac{y^5}{2}\right) dydx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin(x) \left(\frac{y^4}{8} - \frac{y^6}{12}\right)\right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{24} \sin(x)\, dx \\
&= \frac{1}{24} \left[-\cos(x)\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_0^x \int_0^{x-y} ye^z \, dzdydx &= \int_1^2 \int_0^x \left[ye^z\right]_{z=0}^{z=x-y} \, dydx \\
&= \int_1^2 \int_0^x y\left(e^{x-y}-1\right) \, dydx \\
&\overset{(*)}{=} \int_1^2 \left(\left[-y^2 - ye^{x-y}\right]_{y=0}^{y=x} + \int_0^x \left(e^{x-y}+y\right) \, dy \right) dx \\
&= \int_1^2 \left[-y^2 - ye^{x-y} - e^{x-y} + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} dx \\
&= \int_1^2 \left(-x^2 - x - 1 + \frac{x^2}{2} + e^x\right) dx \\
&= \int_1^2 \left(e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1\right) dx \\
&= \left[e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x\right]_{x=1}^{x=2} \\
&= e^2 - \frac{8}{6} - \frac{4}{2} - 2 - e + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 1 \\
&= e^2 - e - \frac{11}{3},
\end{aligned}$$

wobei wir partielle Integration in $(*)$ verwendet haben.

(d)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-1}^4 \int_0^\pi x^2 y \cos(yz) \, dzdydx &= \int_0^1 \int_{-1}^4 \left[x^2 \sin(yz)\right]_{z=0}^{z=\pi} \, dydx \\
&= \int_0^1 \int_{-1}^4 x^2 \sin(\pi y) \, dydx \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{1}{\pi} x^2 \cos(\pi y)\right]_{y=-1}^{y=4} dx \\
&= \int_0^1 -\frac{x^2}{\pi} \left(\cos(4\pi) - \cos(-\pi)\right) \, dx \\
&= \int_0^1 -\frac{2x^2}{\pi} \, dx \\
&= \left[-\frac{2x^3}{3\pi}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{-2}{3\pi}.
\end{aligned}$$

2. Aufgabe (Prüfung Sommer 2004)

(a) Es gilt für das Volumen V des betrachteten Körpers K

$$V = \iint_B f(x,y)\,dxdy = \iint_B xy^2\,dxdy.$$

Da zuerst nach x und anschliessend nach y integriert werden soll, müssen die Randfunktionen zuerst als Funktionen von y dargestellt werden. Da der erste Quadrat der (x,y)-Ebene betrachtet wird $(x>0)$, findet man unmittelbar

$$\begin{aligned} y = x^2 &\quad\Rightarrow\quad x = \sqrt{y}, \\ y = 2-x &\quad\Rightarrow\quad x = 2-y. \end{aligned}$$

Für einen bestimmten y-Wert zwischen 0 und 1 muss man somit über alle x-Werte zwischen $\sqrt{y}$ und $2-y$ integrieren. Man erhält also folgendes Integral für das Volumen

$$V = \iint_B xy^2\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{2-y} xy^2\,dx\right) dy.$$

(b) Integriert man zuerst über y und anschliessend über x, so müssen die Grenzen für y als Funktion von x ausgedrückt werden. Für $x \in [0,1]$ gilt $0 \le y \le x^2$, andererseits ist für $x \in [1,2]$ richtig $0 \le y \le 2-x$. Somit müssen also die beiden Beiträge einzeln berechnet werden und es gilt für das Volumen

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} xy^2\,dy\right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} xy^2\,dy\right) dx.$$

3. Aufgabe

(a) Das Volumen eines Körpers B in kartesischen Koordinaten ist $\iiint_B dV$, und damit hier

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dzdydx.$$

Rechnen wir das Volumen aus:

$$\begin{aligned} V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dzdydx &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dydx \\ &= \int_0^1 \left((1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2\right) dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(b) Es sind

$$\partial_x f(x,y) = e^{x+2y} + 5\sin(5x-5y) - 3x^2,$$

und

$$\partial_y f(x,y) = 2e^{x+2y} - 5\sin(5x-5y).$$

(c) Die partielle Ableitung $\partial_x f$ ist gegeben durch

$$\partial_x f(x,y) = F'\Big(xy + \frac{y}{x}\Big)\Big(y - \frac{y}{x^2}\Big).$$

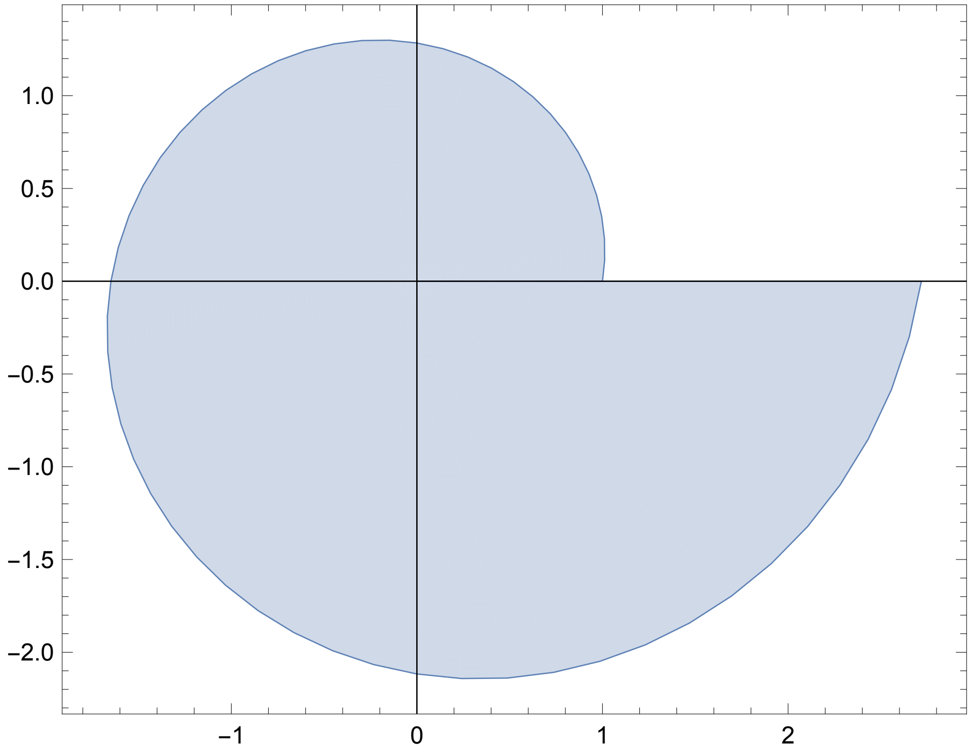
Die Funktion F hängt von einer Variablen ab. Die Funktion f hängt von zwei Variablen ab. Zudem ist f eine Komposition $f(x,y) = F(xy + y/x) = F(g(x,y))$ mit $g(x,y) = xy + y/x$. Bei einer partiellen Ableitung halten wir eine der beiden Variablen x oder y fest. Für $\partial_y f$ ist x fest. Also müssen wir die Ableitung der Funktion $y \mapsto F(xy + y/x) = F(g(x,y))$ berechnen. Das geht mit Kettenregel wie im 1. Semester und ergibt wie in der Aufgabenstellung

$$\partial_y f(x,y) = (F(g(x,y)))' = F'(g(x,y))\partial_y g(x,y) = F'\Big(xy + \frac{y}{x}\Big)\Big(x + \frac{1}{x}\Big).$$

Genauso ergibt sich $\partial_x f(x,y) = F'\Big(xy + \frac{y}{x}\Big)\Big(y - \frac{y}{x^2}\Big)$ oben, da $xy + y/x$ mit festem y nach x abgeleitet gleich $y - \dfrac{y}{x^2}$ ist.

4. Aufgabe

Das Gebiet B sieht wie folgt aus



Die Fläche des Gebietes B ist mit der Formel für Gebiete in Polarkoordinaten gleich

$$\begin{aligned}
\iint_B dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^{r(\phi)} r\,drd\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{e^{\phi/2\pi}} r\,drd\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2\Big|_0^{e^{\phi/2\pi}} d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{\phi/\pi}\,d\phi \\
&= \frac{1}{2}\pi\left[e^{\phi/\pi}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}(e^2-1).
\end{aligned}$$

Multiple Choice

1. Ergebnis: (d).

Der Rand von A ist durch die Funktion $x^2 + y^2 = 4, x \in [0, 2]$ gegeben. Wir lösen diese Kreisgleichung nach y auf und erhalten

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2},\ x \in [0, 2].$$

Damit $y \in [0, 2]$ gilt, erhalten wir die einzige Lösung $y = \sqrt{4 - x^2}$. Also ist diese graue Fläche A durch

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dydx = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx = \frac{4\pi}{4} = \pi$$

gegeben.

2. Ergebnis: (d).

Da

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \geq y \geq x - 1, 1 \geq x \geq 0 \right\},$$

gilt

$$\begin{aligned}
I &= \iint_G Kx\, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_{x-1}^0 Kx\, dydx \\
&= K \int_0^1 -x(x-1)\, dx \\
&= K \int_0^1 \left(-x^2 + x\right)\, dx \\
&= K \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= K \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \\
&= K \cdot \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Damit ist $I = 1$, genau dann wenn $K = 6$.