

Lösung 26

1. Aufgabe

Sei $f(x, y) = xy + x + y$. Das Integrationsgebiet ist gegeben durch

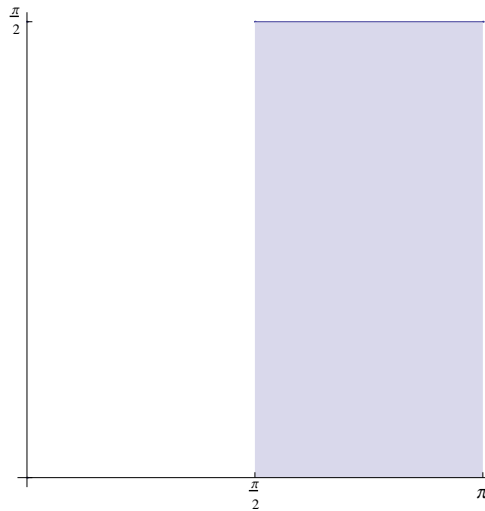
$$G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, -x/2 \leq y \leq x/2\},$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \iint_G (xy + x + y) dy dx &= \int_0^2 \int_{-x/2}^{x/2} (xy + x + y) dy dx \\ &= \int_0^2 \left(\left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=-x/2}^{y=x/2} + [xy]_{y=-x/2}^{y=x/2} + \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_{y=-x/2}^{y=x/2} \right) dx \\ &= \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

2. Aufgabe

1. D ist ein Rechteck mit Flächeninhalt $\frac{\pi^2}{4}$.



Für das erste Integral erhalten wir

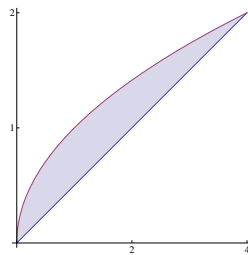
$$\begin{aligned} \iint_D \cos(x) \cos(y) dy dx &= \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x) \cos(y) dy dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x) \int_0^{\pi/2} \cos(y) dy dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} [\cos(x) \sin(y)]_{y=0}^{y=\pi/2} dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x) dx \\ &= [\sin(x)]_{x=\pi/2}^{x=\pi} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Für das zweite Integral über D erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \iint_D \sin(x+y) \, dy \, dx &= \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) \, dy \, dx \\
 &= \int_{\pi/2}^{\pi} [-\cos(x+y)]_{y=0}^{y=\pi/2} \, dx \\
 &= \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos(x+\pi/2) + \cos(x)) \, dx \quad (\text{Hinweis}) \\
 &= \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin(x) + \cos(x)) \, dx \\
 &= [-\cos(x) + \sin(x)]_{x=\pi/2}^{x=\pi} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

2. Der Flächeninhalt von E (siehe Abbildung) ist gegeben durch

$$\iint_E dx \, dy = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} dy \, dx = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x \right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^2 \right]_{x=0}^{x=4} = \frac{4}{3}.$$

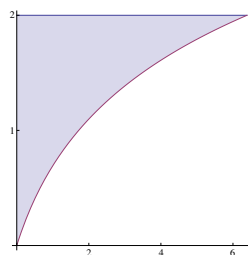


Für das Integral über E erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \iint_E (xy + y) \, dy \, dx &= \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} (xy + y) \, dy \, dx = \int_0^4 \left(\left[\frac{1}{2}y^2x + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=\sqrt{x}} \right) dx \\
 &= \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{8}x^2 \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{24}x^3 \right]_{x=0}^{x=4} = 4.
 \end{aligned}$$

3. Der Flächeninhalt von F (siehe Abbildung) ist gegeben durch

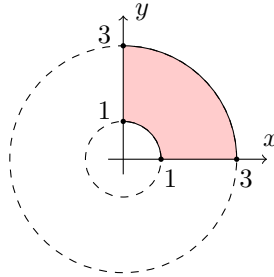
$$\begin{aligned}
 \iint_F dy \, dx &= \int_0^{e^2-1} \int_{\ln(1+x)}^2 dy \, dx = \int_0^{e^2-1} (2 - \ln(1+x)) \, dx \\
 &= [2x - ((1+x)\ln(1+x) - (1+x))]_{x=0}^{x=e^2-1} \quad (\text{Hinweis}) \\
 &= e^2 - 3.
 \end{aligned}$$



4. Es ist $F = \{(x, y) \mid x, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$. Transformation in Polarkoordinaten mit $x = r \cos(\varphi)$ und $y = r \sin(\varphi)$ liefert

$$\begin{aligned} x, y \geq 0 &\iff r \cos(\varphi), r \sin(\varphi) \geq 0 \iff \cos(\varphi), \sin(\varphi) \geq 0 \\ &\iff \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (\text{uns interessieren } \varphi \in [0, 2\pi]) \end{aligned}$$

und $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \iff 1 \leq r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi) \leq 9 \iff 1 \leq r^2 \leq 9$ wegen $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$.
Somit ist $D = \{(r, \varphi) \mid \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ und } 1 \leq r \leq 3\}$.



Die Fläche ist folglich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^3 r \, dr \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=1}^{r=3} d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = [4\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 2\pi.$$

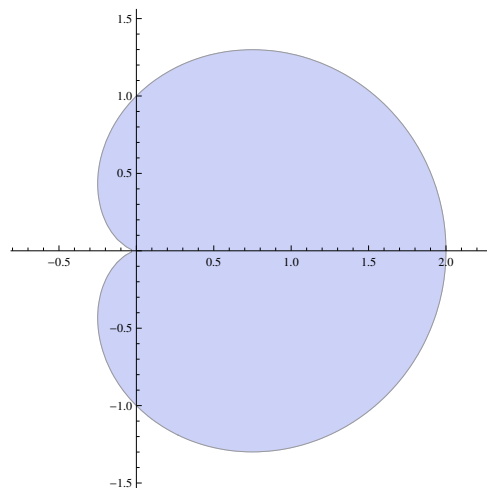
Die Fläche von D lässt sich auch direkt mit πr^2 für die Fläche eines Kreises angeben und zwar

$$\frac{1}{4}(9\pi - \pi) = 2\pi.$$

Wir sehen, dass die Resultate in der Tat übereinstimmen.

5. Die Flächeninhalt von K (siehe Abbildung) ist

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos(\varphi)} r \, dr \, d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left(\left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=1+\cos(\varphi)} \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + 2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + 2\cos(\varphi) + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \right) d\varphi \quad (\text{Hinweis}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{3}{2} \varphi + 2\sin(\varphi) + \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \right) = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$



3. Aufgabe

(a) Mögliche Parametrisierungen der Wege γ_1 und γ_2 sind

$$\begin{aligned}\gamma_1 : \quad r(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} && \text{mit } 0 \leq t \leq 2 \\ \gamma_2 : \quad r(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 4 \end{pmatrix} && \text{mit } 0 \leq t \leq 2.\end{aligned}$$

(b) Um ein Linienintegral zu berechnen, setzen wir die Parametrisierungen aus (a) in das Vektorfeld ein. Danach leiten wir die Parametrisierungen ab und bilden das Skalarprodukt mit dem Vektorfeld.

i) Für den ersten Weg bekommen wir

$$\begin{aligned}\vec{F}(r_1(t)) &= \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}, & \dot{r}_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \\ \implies \vec{F}(r_1(t)) \cdot \dot{r}_1(t) &= t^2 + 2t^3.\end{aligned}$$

Das Linienintegral entlang γ_1 ist dann

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 (t^2 + 2t^3) dt = \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3}.$$

ii) Für γ_2 gehen wir analog vor.

$$\begin{aligned}\vec{F}(r_2(t)) &= \begin{pmatrix} 4 \\ (2-t)^2 \end{pmatrix}, & \dot{r}_2(t) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \implies \vec{F}(r_2(t)) \cdot \dot{r}_2(t) &= -4.\end{aligned}$$

Das Linienintegral entlang γ_2 ist dann

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_0^2 4 dt = -8.$$

iii) Das gleiche Vorgehen gilt für γ_3 .

$$\begin{aligned}\vec{F}(r_3(t)) &= \begin{pmatrix} 4-t \\ 0 \end{pmatrix}, & \dot{r}_3(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \implies \vec{F}(r_3(t)) \cdot \dot{r}_3(t) &= 0.\end{aligned}$$

Das Linienintegral entlang γ_3 ist demnach 0.

Es folgt also

$$I = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{32}{3} - 8 + 0 = \frac{8}{3}.$$

4. Aufgabe

- (a) Zuerst brauchen wir eine Parametrisierung der Kurve C durch einen Ortsvektor $r(t)$. In diesem Fall können wir direkt

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } -2 \leq t \leq 1,$$

wählen. Jetzt können wir wie in Aufgabe 1 das Kurvenintegral ausrechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{F}(r(t)) &= \begin{pmatrix} t + t^3 \\ 2t - t^3 \end{pmatrix}, & \dot{r}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \\ \implies \vec{F}(r(t)) \cdot \dot{r}(t) &= t + 7t^3 - 3t^5. \end{aligned}$$

Daher ist das Kurvenintegral gleich

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-2}^1 (t + 7t^3 - 3t^5) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{7}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^6 \right]_{-2}^1 = \frac{15}{4}.$$

- (b) Zuerst brauchen wir wieder eine Parametrisierung der Kurve C durch einen Ortsvektor $r(t)$. Da es sich um den Einheitskreis handelt mit Startpunkt $(1, 0)$ und im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen, bietet sich folgende Parametrisierung an

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Jetzt können wir wie in Aufgabe 2 das Kurvenintegral ausrechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{F}(r(t)) &= \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, & \dot{r}(t) &= \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \\ \implies \vec{F}(r(t)) \cdot \dot{r}(t) &= \cos(t) \sin(t) + 1. \end{aligned}$$

Daher ist das Kurvenintegral gleich

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\cos(t) \sin(t) + 1) dt = \left[\frac{1}{2} \cos(t)^2 + t \right]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Multiple Choice

1. Ergebnis: (d).

Die allgemeine Formel für Polarkoordinaten lautet

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy = \iint_{\tilde{B}} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \, r \, dr d\varphi.$$

Hier ist

$$f(x, y) = xy \implies f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi),$$

was impliziert

$$\iint_B xy \, dx dy = \iint_{\tilde{B}} r^3 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \, dr d\varphi.$$

2. Ergebnis: (a).

Die Gerade und die Parabel schneiden sich bei $x = -2$ und bei $x = 1$. Damit ist der gesuchte Flächeninhalt

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 (-x + 2 - x^2) \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$