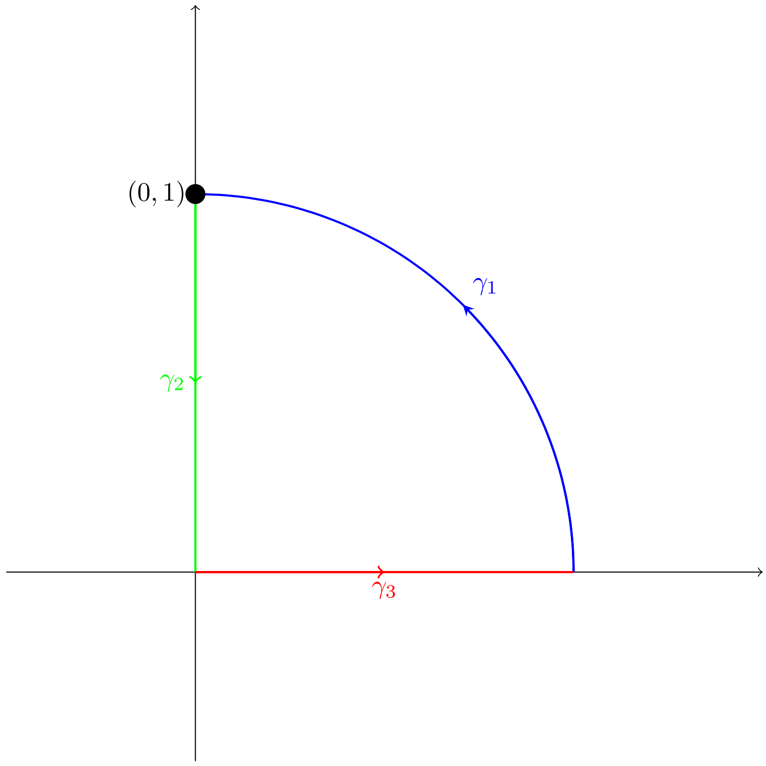
Lösung 27

1. Aufgabe (Prüfung Sommer 2009)

(a) Die drei Wege bilden ein Vierteleinheitskreis im 1. Quadranten, positiv orientiert.



(b) Mit der Substitution (bei I_1)

$$x = \cos(t), \quad dx = -\sin(t)dt \quad \text{und} \quad y = \sin(t), \quad dy = \cos(t)dt,$$

folgt

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\gamma_1} -xy\,dx + x^2dy = \int_0^{\pi/2} \big(\cos(t)\sin^2(t) + \cos^3(t)\big)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t)dt = \sin(\pi/2) = 1, \\ I_2 &= \int_{\gamma_2} -xy\,dx + x^2dy = 0, \\ I_3 &= \int_{\gamma_3} -xy\,dx + x^2dy = 0. \end{aligned}$$

(c)

$$I = \int_\gamma -xy\,dx + x^2dy = I_1 + I_2 + I_3 = 1.$$

(d) Aus dem Satz von Gauss-Green folgt

$$I = \int_\gamma -xy\,dx + x^2dy = 3\iint_K x\,dxdy = 3\int_0^{\pi/2}\cos(\varphi)d\varphi \int_0^1 r^2dr = 3\cdot 1\cdot 1/3 = 1,$$

wobei K für das Vierteleinheitskreises im ersten Quadranten steht.

2. Aufgabe (Prüfung Sommer 2011)

(a)

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, && \text{für } 0 \le t \le 1, \\
\gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, && \text{für } 0 \le t \le 1, \\
\gamma_3(t) &= \begin{pmatrix} 1-t \\ (1-t)^3 \end{pmatrix}, && \text{für } 0 \le t \le 1.
\end{aligned}$$

(b) Mit der Substitution

- **bei** I_1**:** $x = t, dx = dt$ und $y = 0, dy = 0$,
- **bei** I_2**:** $x = 1, dx = 0$ und $y = t, dy = dt$,
- **bei** I_3**:** $x = (1-t), dx = -dt$ und $y = (1-t)^3, dy = -3(1-t)^2 dt$,

folgt

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\gamma_1} -3y\,dx + 2x\,dy = 0. \\
I_2 &= \int_{\gamma_2} -3y\,dx + 2x\,dy = \int_0^1 2dt = 2. \\
I_3 &= \int_{\gamma_3} -3y\,dx + 2x\,dy = \left[\frac{3(1-t)^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

(c)

$$I = \oint_{\gamma} -3y\,dx + 2x\,dy = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{5}{4}.$$

(d) Es gilt $\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ 2x \end{pmatrix}$, somit ist $\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y) = 5$. Mit dem Satz von Gauss-Green erhalten wir dann

$$\int_0^1 \int_0^{x^3} 5\,dydx = 5\int_0^1 x^3\,dx = \frac{5}{4}.$$

3. Aufgabe

(a) Wir parametrisieren die Kurve in drei Teilen:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, && \text{für } 0 \le t \le 1, \\
\gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, && \text{für } 0 \le t \le 1, \\
\gamma_3(t) &= \begin{pmatrix} 1-t \\ (1-t)^{2/3} \end{pmatrix}, && \text{für } 0 \le t \le 1.
\end{aligned}$$

Es ist $\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 \end{pmatrix}$, also

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} xy\,dx + x^2\,dy &= \int_0^1 0\,dt + \int_0^1 1\,dt + \int_0^1 (1-t)^{\frac{5}{3}} \cdot (-1) - (1-t)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot (1-t)^{-\frac{1}{3}}\,dt \\
&= \int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{5}{3}(1-t)^{\frac{5}{3}}\,dt = 1 + \frac{5}{8}\left[(1-t)^{\frac{8}{3}}\right]_0^1 = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Mit Greenscher Formel:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overrightarrow{F}\cdot d\vec{r} &= \int_B (\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y))\ dydx \\ &= \int_0^1\int_0^{x^{2/3}} (2x-x)\,dydx = \int_0^1 x\cdot x^{\frac{2}{3}}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{5}{3}}\,dx = \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

(b) Parametrisierung:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) = &\begin{pmatrix}-2+t\\0\end{pmatrix}, \qquad \text{für } 0\le t\le 4,\\ \gamma_2(t) = &\begin{pmatrix}2-t\\4t-t^2\end{pmatrix}, \qquad \text{für } 0\le t\le 4.\end{aligned}$$

Weiter ist $\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix}P(x,y)\\Q(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^2+y\\0\end{pmatrix}$, also

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overrightarrow{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^4 (-2+t)^2\,dt - \int_0^4 \left[(2-t)^2+4t-t^2\right]\,dt \\ &= \int_0^4 (t^2-4t)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3-2t^2\right]_0^4 = -\frac{32}{3}.\end{aligned}$$

Mit Greenscher Formel:

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot d\vec{r} = \int_B (0-1)\,dydx = -\int_{-2}^2\int_0^{4-x^2} dydx = -\int_{-2}^2 (4-x^2)\,dx = -\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^2 = -\frac{32}{3}.$$

4. Aufgabe

Wenn wir die Komponenten von $\overrightarrow{F}$ durch $\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix}P(x,y)\\Q(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\x^2\end{pmatrix}$ beschreiben, dann besagt die Formel von Gauss-Green, dass

$$\oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \iint_D (\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y))\ dD,$$

wobei D das durch die Kurve C eingeschlossene Gebiet ist. Auf der rechten Seite steht ein normales Doppelintegral. In unserem Fall ist

$$\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y) = 2x-1,$$

und D ist die durch γ_1, γ_2 und γ_3 begrenzte Fläche, die man schreiben kann als

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le x\le 2\,,\ x^2\le y\le 4\right\}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\iint_D \Big(\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y)\Big)\,dD &= \int_0^2\int_{x^2}^4 (2x-1)\,dydx \\ &= \int_0^2 \Big(\left[2xy-y\,\right]_{y=x^2}^{y=4}\Big)\ dx = \int_0^2 \left(8x-4-2x^3+x^2\right)\ dx \\ &= \left[4x^2-4x-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Wir haben somit berechnet

$$\oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\vec{r} = \frac{8}{3}.$$

Multiple Choice

1. Ergebnis: (c).

Mit der Formel von Gauss-Green ergibt sich

$$\oint_\gamma \overrightarrow{F_3} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y))\ dxdy = \iint_D (0-0)\ dxdy = 0.$$

Das folgt auch ohne die Formel mit einer Parametrisierung von γ.

2. Ergebnis: (c).

Für die Gegenrichtung ist das Arbeitsintegral gleich dem Ausgangswert mit umgekehrtem Vorzeichen.