

D-BIOL D-CHAB D-HEST

Probeprüfung / Selbsteinstufungstest

Mathematik II

401-0292-00L

Prüfungsangabe

Bitte noch nicht umblättern!

Multiple Choice

1. Aufgabe

[20 Punkte]

Die Abgabe erfolgt über **Echo**. Pro Teilaufgabe ist genau eine der Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie **2 Punkte**, sonst **0 Punkte**. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

Lineare Algebra:

MC1. Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Was ist der Rang von A ?

- (A) 1,
- (B) 2,
- (C) 3,
- (D) 4.

MC2. Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Was ist die Determinante von A ?

- (A) 0,
- (B) 2,
- (C) 12,
- (D) 24.

MC3. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Welche Rechenregel gilt im Allgemeinen **nicht**?

- (A) $\det(2A) = 2 \det(A)$,
- (B) $\det(A) \det(B) = \det(AB)$,
- (C) $\det(AB) = \det(BA)$,
- (D) $\det(I_n) = 1$.

MC4. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Welche Aussage ist **wahr**?

- (A) Es gilt $\text{Rang}(A) = 2$,
- (B) Es gilt $\text{Rang}(A) = 3$,
- (C) Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = c$ hat keine Lösung,
- (D) Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = c$ hat unendlich viele Lösungen.

MC5. Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Was sind die Eigenwerte von A ?

- (A) $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$,
- (B) $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$,
- (C) $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$,
- (D) $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

MC6. Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche Aussage ist **wahr**?

- (A) Alle Eigenwerte von A sind verschieden von 0,
- (B) Die Spaltenvektoren von A sind linear abhängig,
- (C) Es ist $\det(A) = 4$,
- (D) Die Matrix A ist invertierbar.

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

MC7. Welche ist die allgemeine Lösung auf $\mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y'(x) + y(x) + x = 0$?

- (A) $y(x) = -x + 1 + C$, für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$,
- (B) $y(x) = C \exp(-x) - x + 1$, für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$,
- (C) $y(x) = -x^2 + x + C$, für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$,
- (D) Diese Differentialgleichung hat keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.

MC8. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0.$$

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

- (A) $y(x) = 0$ ist die einzige konstante Lösung der Differentialgleichung,
- (B) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form $y(x) = Cxe^{-3x}$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$,
- (C) Dies ist eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung,
- (D) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form $y(x) = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$ für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Multivariate Funktionen:

MC9. Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = x^2y + y^2 - 1$ und die Kurve in der (x, y) -Ebene gegeben durch die Bedingung $f(x, y) = 0$. Welcher der folgenden Punkte ist ein Schnittpunkt der Kurve mit der Geraden $y = x - 1$?

- (A) $(-\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} + 1)$,
- (B) $(-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2})$,
- (C) $(\sqrt{2} - 1, -1)$,
- (D) $(\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$.

MC10. Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x, y) = 2x + 2y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$. Welche der folgenden Aussagen über diese Extremwerte ist **wahr**?

- (A) Der Punkt $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ist kein Extremum,
- (B) Der Punkt $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ist ein Minimum,
- (C) Der Punkt $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ist ein Maximum,
- (D) Der Punkt $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ist ein Maximum.

Aufgaben

2. Aufgabe (Prüfung Sommer 2021)

[5 Punkte]

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte** sowie **Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

Sei A die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \mu \\ \mu & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ mit einem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und sei b der Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- (a) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie alle Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ für welche die Determinante von A gleich Null ist.
- (b) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie alle Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ für welche die zwei Vektoren b und $A^T b$ linear abhängig sind.
- (c) [2 Punkte] Berechnen Sie den Rang von A in Abhängigkeit von μ für alle $\mu \in \mathbb{R}$.

3. Aufgabe (Prüfung Sommer 2019)**[5 Punkte]**

Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte** sowie **Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.

[5 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems 2. Ordnung

$$\begin{cases} y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 4x^2 + 12x + 6, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$