D–BIOL D–CHAB D–HEST

Probeprüfung / Selbsteinstufungstest
Mathematik II

401-0292-00L

Lösung

Multiple Choice

1. Aufgabe **[20 Punkte]**

Lineare Algebra:

MC1. Ergebnis: (C).

Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3-4Z_1]{Z_2-2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3-\frac{1}{5}Z_2]{Z_2\cdot\frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Das impliziert, dass $\mathrm{Rang}(A) = 3$.

MC2. Ergebnis: (D).

Mit der Regel von Sarrus folgt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 6 + 6 - 6 + 6 + 6 + 6 = 24.$$

MC3. Ergebnis: (A).

Multipliziert man eine Zeile einer Matrix mit einem Skalar λ, so multipliziert sich die Determinante ebenfalls mit λ. Multipliziert man die gesamte Matrix A mit λ, so multipliziert man n verschiedene Zeilen mit λ, und insgesamt multipliziert sich die Determinante mit λ^n. Es gilt also

$$\det(2A) = 2^n \det(A),$$

und die Aussage (A) ist im Allgemeinen falsch.

MC4. Ergebnis: (B).

Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4-3Z_1]{Z_3-Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4+3Z_3]{Z_3-Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_4-6Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $\mathrm{Rang}(A) = 3$.

MC5. **Ergebnis:** (B).

Es gilt

$$\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

MC6. **Ergebnis:** (B).

Hier ist $\det(A) = 0$, daher sind die Spaltenvektoren von A linear abhängig.

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

MC7. **Ergebnis:** (B).

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1.Ordnung vom Typ

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x),$$

wobei $f(x) = 1$ und $g(x) = -x$. Durch Variation der Konstanten wissen wir, dass die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'(x) + f(x)y(x) = 0$ lautet

$$y_{hom}(x) = K \exp\Big(-\int f(x)dx\Big) = K\exp(-x),$$

für eine Konstante $K \in \mathbb{R}$. Um die inhomegene Differentialgleichung zu lösen, können wir den folgenden Ansatz benutzen

$$y(x) = K(x)\exp(-x),$$

was impliziert

$$y'(x) = K'(x)\exp(-x) - K(x)\exp(-x) = (K'(x) - K(x))\exp(-x).$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} y'(x) + y(x) + x &= (K'(x) - K(x))\exp(-x) + K(x)\exp(-x) + x \\ &= K'(x)\exp(-x) + x = 0. \end{aligned}$$

Durch Integration folgt hieraus

$$K(x) = -\int x\exp(x)dx = (1-x)\exp(x) + C,$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Die inhomogene Differentialgleichung besitzt damit die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= \Big[(1-x)\exp(x) + C\Big]\exp(-x) \\ &= C\exp(-x) - x + 1, \end{aligned}$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

MC8. Ergebnis: (B).

Da -3 die einzige Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung ist, erhalten wir als Ansatz

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x},$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Multivariate Funktionen:

MC9. Ergebnis: (D).

Wir setzen $y = x - 1$ in die Funktion ein und vereinfachen das resultierende Polynom

$$f(x, x-1) = x^2(x-1) + (x-1)^2 - 1 = x^3 - 2x = x(x^2 - 2).$$

Dies ist 0 genau dann wenn $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ oder $x = -\sqrt{2}$. Einsetzen dieser x-Werte in $y = x - 1$ liefert die Schnittpunkte $(0, -1)$ und $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2} - 1)$. Der gesuchte Punkt ist damit $(\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$.

MC10. Ergebnis: (A).

Wir schreiben $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, wobei die Nebenbedingung als $g(x, y) = 0$ aufgefasst wird. Wir benutzen nun die Lagrange-Multiplikatoren-Methode. Dass heisst, wir berechnen

$$\nabla f = \lambda \nabla g \implies \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda x \\ 2\lambda y \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$x = y = \frac{1}{\lambda},$$

und zusammen mit der Nebenbedingung erhalten wir

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

Hieraus erhalten wir zwei verschiedene Punkte

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Einsetzen in f ergibt

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2},\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{2}.$$

Somit haben wir in P_1 ein Maximum und in P_2 ein Minimum.

Aufgaben

2. Aufgabe (Prüfung Sommer 2021) [5 Punkte]

Sei A die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \mu \\ \mu & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ mit einem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und sei b der Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) [**1.5 Punkte**] Bestimmen Sie alle Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ für welche die Determinante von A gleich Null ist.

Lösung:

Mit Sarrus erhalten wir

$$\det(A) = 4 - 3 + \mu^2 - 6\mu - 1 + 2\mu = \mu^2 - 4\mu = \mu(\mu - 4).$$

Es folgt

$$\det(A) = 0 \iff \mu = 0 \quad \text{oder} \quad \mu = 4.$$

(b) [**1.5 Punkte**] Bestimmen Sie alle Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ für welche die zwei Vektoren b und $A^T b$ linear abhängig sind.

Lösung:

Die zwei Vektoren b und $A^T b$ sind linear abhängig, wenn es einen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\lambda b = A^\top b. \tag{1}$$

Hier gilt

$$A^\top b = \begin{pmatrix} -1 & \mu & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ \mu & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ \mu + 2 \end{pmatrix}.$$

Daher kann (1) gelten, nur wenn $\lambda = -4$ und $\mu = 2$.

(c) **[2 Punkte]** Berechnen Sie den Rang von A in Abhängigkeit von μ für alle $\mu \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Wir wissen bereits aus (a), dass $\det(A) = 0$ für $\mu = 0$ und $\mu = 4$. Insbesondere hat A vollen Rang genau dann, wenn $\mu \notin \{0, 4\}$. Die Fälle $\mu = 0$ und $\mu = 4$ werden separat betrachtet mit Zeilenumformungen. Für $\mu = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3+3Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3-2Z_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat also Rang 2 wenn $\mu = 0$. Für $\mu = 4$ gilt ähnlicherweise

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2+4Z_1]{Z_3+3Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 15 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3-(2/3)Z_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Auch in diesem Fall hat die Matrix Rang 2.

Aufgabe (Prüfung Sommer 2019) **[5 Punkte]**

[**5 Punkte**] Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems 2. Ordnung

$$\begin{cases} y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 4x^2 + 12x + 6, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Lösung:

Zunächst lösen wir die homogene Differentialgleichung

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0.$$

Hierfür müssen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

ausrechnen. Es gilt

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \implies \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,$$

woraus die homogene Lösung

$$y_{\mathbf{hom}}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

folgt. Für die inhomogene Gleichung betrachten wir den Ansatz

$$y_{\mathbf{inh}}(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 4x^2 + 12x + 6$$

ergibt

$$2A + 6Ax + 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 4x^2 + 12x + 6,$$

und folglich mit dem Koeffizientenvergleich

$$2A = 4 \Rightarrow A = 2,\ 6A + 2B = 12 \Rightarrow B = 0,\ 2A + 3B + 2C = 6 \Rightarrow C = 1 \Longrightarrow y_{\mathbf{inh}}(x) = 2x^2 + 1.$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = y_{\mathbf{hom}}(x) + y_{\mathbf{inh}}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + 2x^2 + 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Für das Einsetzen der Nebenbedingungen brauchen wir zunächst die Ableitung der allgemeinen Lösung

$$y'(x) = -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x} + 4x.$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{cases} 0 = y(0) = C_1 + C_2 + 1, \\ 1 = y'(0) = -2C_1 - C_2. \end{cases} \tag{2}$$

Das addieren der beiden Gleichungen ergibt $C_1 = 0$ und folglich $C_2 = -1$.
Die Lösung der Differentialgleichung ist somit

$$y(x) = 2x^2 - e^{-x} + 1.$$