Serie 17

1. Aufgabe

Untersuchen Sie das Lösungsverhalten der folgenden linearen Gleichungssysteme und bestimmen Sie im Falle der Lösbarkeit sämtliche Lösungen.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ -2x_1 + x_3 &= -2, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4, \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 5. \end{cases}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 8 & -4 \\ 4 & 2 & -16 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 0, \\ 2x_2 + 6x_3 &= 0. \end{cases}$

2. Aufgabe

Zeigen Sie: Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ eine 2×2 - Matrix mit $\det(A) \neq 0$, so ist die dazu inverse Matrix

$$B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe

Gegeben sei die vom Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ abhängige Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ und der Vektor $b \in \mathbb{C}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von λ verschwindet die Determinante von A?

(b) Wann hat das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$

  (i) nur die triviale Lösung $x = 0$,

  (ii) auch nichttriviale Lösungen? Wie lauten diese?

(c) Wann hat das inhomogene lineare Gleichungssystem $Ax = c$ für jede Inhomogenität $c \in \mathbb{C}^3$ genau eine Lösung?

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$ in Abhängingkeit von λ.

4. Aufgabe

Für welche Werte des Parameters $\lambda \in \mathbb{C}$ besitzen folgende homogene lineare Gleichungssysteme nicht-triviale Lösungen?

(a) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Abgabe : Vor Samstag, den 8. März um 12 Uhr über SAMup.

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und wählen Sie bei der Eingabe "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Übungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Welche der folgenden Matrizen besitzt keine Inverse?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad$ für $\varphi \in \mathbb{R}$,

(d) $D = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) - i\sin(\varphi) & 1 \\ 1 & \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad$ für $\varphi \in \mathbb{R}$.

2. Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei $M = AB$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) Es gilt $\text{Rang}(M) = 0$,

(b) Es gilt $\text{Rang}(M) = 1$,

(c) Es gilt $\text{Rang}(M) = 2$,

(d) Es gilt $\text{Rang}(M) = 3$.

Abgabe : Vor Samstag, den 8. März um 12 Uhr über Echo.