Serie 19

1. Aufgabe

Sei $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von B sowohl in kartesischer Darstellung als auch in Polardarstellung.

(b) Der Vektor $v = \begin{pmatrix} i \\ b \end{pmatrix}$ sei ein Eigenvektor von B mit $b > 0$. Bestimmen Sie die Koordinate b.

(c) Sei $w = \begin{pmatrix} -i \\ y \end{pmatrix}$ ein weiterer Eigenvektor von B. Bestimmen Sie die Koordinate y so, dass v und w linear unabhängig sind.

2. Aufgabe

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & v+8 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ w \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ in Abhängigkeit des Parameters v.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$ in Abhängigkeit der Parameter v und w.

3. Aufgabe

Sei

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix B.

4. Aufgabe (Prüfung Sommer 2022)

Betrachten Sie folgende Matrizen A und B sowie den Vektor b:

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 5 & -9 & -5 \\ 3 & -5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A hängt von einem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ ab.

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A in Abhängigkeit von μ für alle $\mu \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $\mu = 3$. Berechnen Sie die Inverse von A.

(c) Sei $\mu = 1$. Bestimmen Sie **alle** Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

(d) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix B. Finden Sie einen normierten Eigenvektor zu dem doppelten Eigenwert dieser Matrix.

Abgabe : Vor Samstag, den 22. März um 12 Uhr über SAMup.

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und wählen Sie bei der Eingabe "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Übungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

(a) Jede 2×2 Matrix hat zwei voneinander verschiedene Eigenwerte,

(b) Jeder Eigenvektor einer invertierbaren Matrix ist auch Eigenvektor der Inversen,

(c) Die Eigenwerte einer invertierbaren Diagonalmatrix sind alle verschieden von 0,

(d) Alle obigen Aussagen sind wahr.

2. Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 4 & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nicht-triviale Lösungen?

(a) $\lambda = \pm 2$,

(b) $\lambda = \pm 2i$,

(c) $\lambda = \pm 4$,

(d) $\lambda = \pm 4i$.

Abgabe : Vor Samstag, den 22. März um 12 Uhr über Echo.