Serie 23

1. Aufgabe

Gegeben ist die Funktion
$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Fläche $z = f(x,y)$ im Punkt $(2,-2,1/4)$.

(b) Nun setzen wir
$$x = x(r,\varphi) = r\cos(\varphi) \quad \text{und} \quad y = y(r,\varphi) = r\sin(\varphi).$$

Bestimmen Sie für die Funktion F mit $F(r,\varphi) = f(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$ die partiellen Ableitungen 1. Ordnung $\partial_r F$ und $\partial_\varphi F$ mithilfe der Kettenregel (für Funktionen mit zwei Parametern).

(c) Verifizieren Sie Ihr Resultat aus (b), indem Sie zuerst die Parametergleichungen in die Funktionsgleichung einsetzen und dann nach den Parametern r und φ ableiten.

2. Aufgabe

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (s,t) \mapsto F(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$, eine Funktion mit
$$f(x,y) = x^2y + xy^2, \quad x(s,t) = s+t \quad \text{und} \quad y(s,t) = s-t.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Kettenregel die partiellen Ableitungen $\partial_{ss}F$, $\partial_{st}F$ und $\partial_{tt}F$.

3. Aufgabe

Gegeben sei die Funktion
$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} - 8x^2 - 4y^2$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Ableitung von f, bestimmen Sie die kritischen Punkte und entscheiden Sie jeweils ob ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

4. Aufgabe

Untersuchen Sie die Funktion
$$f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 3y^2$$

auf lokale Extrema und Sattelpunkte. Geben Sie jeweils deren Lage, Funktionswert und Typ (Maximum, Minimum, Sattelpunkt) an.

Abgabe : Vor Samstag, den 19. April um 12 Uhr über SAMup.

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und wählen Sie bei der Eingabe "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Übungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Seien u und v beliebig oft differenzierbare Funktionen in einer Variablen. Angenommen, eine Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ schreibt sich in der Form

$$f(x, y) = u(x) + v(y).$$

Welche der folgenden Aussagen ist für jedes f dieser Form korrekt?

(a) $\partial_{xx} f(x, y) = 0$,

(b) $\partial_{xy} f(x, y) = 0$,

(c) $\partial_{yy} f(x, y) = 0$,

(d) Eine solche Funktion gibt es nicht.

2. Gegeben seien drei Funktionen $\varphi, \psi, \chi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x, y) = C, \quad \psi(x, y) = x^2 \quad \text{und} \quad \chi(x, y) = x^2 + y^2,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ konstant ist. Sei f eine Funktion mit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$, deren partielle Ableitungen 2. Ordnung existieren und stetig sind. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?
Hinweis: Verwenden Sie, dass hier $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$ gilt, um die drei falschen Aussagen auszuschliessen.

(a) Es gibt eine Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ mit $\partial_x f(x, y) = \varphi(x, y)$ und $\partial_y f(x, y) = \psi(x, y)$,

(b) Es gibt eine Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ mit $\partial_x f(x, y) = \psi(x, y)$ und $\partial_y f(x, y) = \varphi(x, y)$,

(c) Es gibt eine Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ mit $\partial_x f(x, y) = \varphi(x, y)$ und $\partial_y f(x, y) = \chi(x, y)$,

(d) Es gibt eine Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ mit $\partial_x f(x, y) = \chi(x, y)$ und $\partial_y f(x, y) = \varphi(x, y)$.

Abgabe : Vor Samstag, den 19. April um 12 Uhr über Echo.