Serie 25

1. Aufgabe

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_{-y^2}^{x^2} (1+x)\, dz dy dx,$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_{y^2}^{y} \sin(x) yz\, dz dy dx,$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^x \int_0^{x-y} ye^z\, dz dy dx,$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^4 \int_0^{\pi} x^2 y \cos(yz)\, dz dy dx.$

2. Aufgabe (Prüfung Sommer 2004)

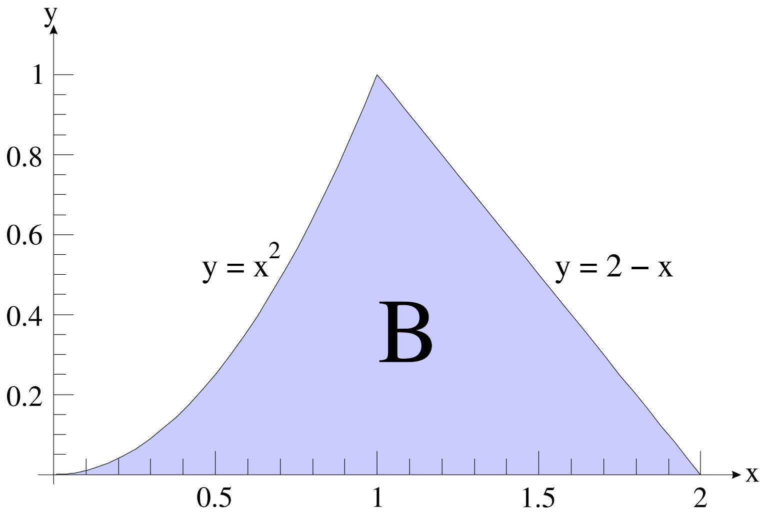
Es sei K der Körper unter dem Graphen der Funktion

$$f(x,y) = xy^2$$

über dem Bereich B in der (x,y)-Ebene (siehe Abbildung). Mit der Formel

$$\int_{\square}^{\square} \left(\int_{\square}^{\square} \square \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \tag{1}$$

soll das Volumen des Körpers bestimmt werden.



(a) Füllen Sie die Kästchen in der Formel (1) aus.

(b) Wie lautet die (aus zwei Summanden bestehende) Formel, wenn "zuerst nach y" integriert wird?

3. Aufgabe

(a) Die drei Koordinatenebenen in $\mathbb{R}^3$ und die Ebene

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = 1 - x - y \right\}$$

schliessen einen Körper ein. Bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers mit Hilfe eines Dreifachintegrals.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch $f(x, y) = e^{x+2y} - \cos\big(5(x - y)\big) - x^3$. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x f(x, y)$ und $\partial_y f(x, y)$.

(c) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Gegeben sei die Funktion

$$f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = F\Big(xy + \frac{y}{x}\Big).$$

Für die partielle Ableitung $\partial_y f$ gilt

$$\partial_y f(x, y) = F'\Big(xy + \frac{y}{x}\Big)\Big(x + \frac{1}{x}\Big).$$

Bestimmen Sie die partielle Ableitung $\partial_x f(x, y)$ in Abhängigkeit von $F'(\cdot)$.

4. Aufgabe

Die sogenannte logarithmische Spirale $r(\phi) = e^{\frac{\phi}{2\pi}}$ mit $0 \leq \phi \leq 2\pi$ “umschliesst” das Gebiet (Polarkoordinaten)

$$B = \Big\{ (r, \phi) \,|\, 0 \leq \phi \leq 2\pi \,,\, 0 \leq r \leq e^{\frac{\phi}{2\pi}} \Big\}.$$

Skizzieren Sie das Gebiet B und rechnen Sie dessen Fläche aus.

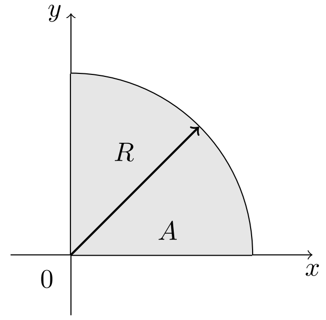
Abgabe : Vor Samstag, den 17. Mai um 12 Uhr über SAMup.

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und wählen Sie bei der Eingabe "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Übungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Sei A wie in untenstehender Skizze das erste Viertel des Kreises um Null mit Radius $R = 2$, das heisst

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2 \}.$$



Welches der folgenden Integrale hat denselben Wert wie der Flächeninhalt von A?

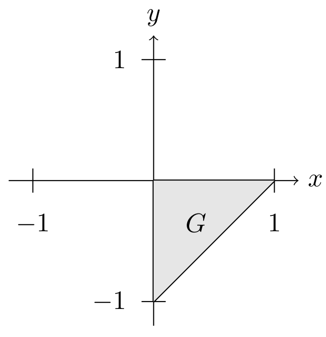
(a) $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi,$

(b) $8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi,$

(c) $\frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx,$

(d) $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx.$

2. Sei G das untenstehende Dreieck. Für welches $K \in \mathbb{R}$ ist $I = \iint_G Kx\, dxdy = 1$?



(a) $K = -6,$

(b) $K = 1,$

(c) $K = 3,$

(d) $K = 6.$

Abgabe : Vor Samstag, den 17. Mai um 12 Uhr über Echo.