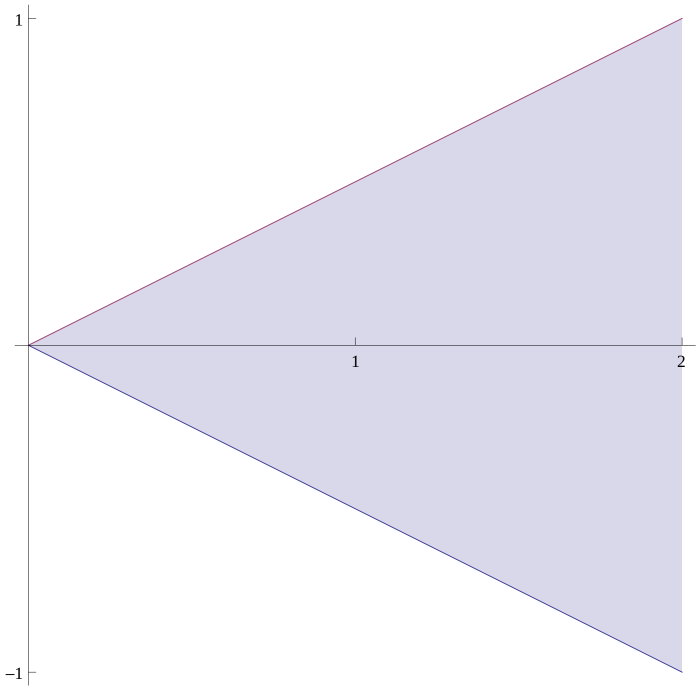
Serie 26

1. Aufgabe

Sei $f(x,y) = xy + x + y$. Berechnen Sie für das Gebiet G in der Skizze das Integral $\iint_G f(x,y)\,dydx$.



2. Aufgabe

Skizzieren Sie jeweils die Gebiete, berechnen Sie deren Flächeninhalt und allenfalls die angegebenen Integrale.

(a) $D = \left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ mit $\iint_D \cos(x)\cos(y)\,dydx$ und $\iint_D \sin(x+y)\,dydx$.

Hinweis: $-\cos(x+\pi/2) = \sin(x)$.

(b) $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq x \leq 4,\ \frac{1}{2}x \leq y \leq \sqrt{x}\right\}$ mit $\iint_E (xy+y)\,dydx$.

(c) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq e^2 - 1,\ \ln(1+x) \leq y \leq 2\}$. **Hinweis:** $\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + c,\ c \in \mathbb{R}$.

(d) $R \subset \mathbb{R}^2$ im 1. Quadranten der (x,y)-Ebene, begrenzt durch die zwei Achsen $x = 0,\ y = 0$ und zwei Kreise $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 9$. Geben Sie R in Polarkoordinaten an und berechnen Sie damit den Flächeninhalt.

(e) $K = \{(r,\varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1 + \cos(\varphi)\}$ mit Polarkoordinaten (r,φ).

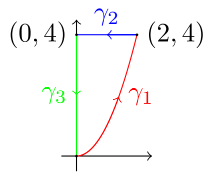
Hinweis: Es gilt $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$.

3. Aufgabe

Wir wollen das Linienintegral $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint_C \left(\overrightarrow{F} \cdot \dot{\overrightarrow{r}}\right) dt$ des Vektorfeldes

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve C berechnen, die sich aus den Wegen γ_1, γ_2 und γ_3 zusammensetzt. Die Wege γ_1, γ_2 und γ_3 sind in der untenstehenden Skizze gegeben. Der Weg γ_1 verläuft entlang der Parabel $y = x^2$.



(a) Wir müssen als erstes die Kurven γ_1, γ_2 und γ_3 durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{r}(t)$ parametrisieren. Zum Beispiel wird die Kurve γ_3 durch den Vektor

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 - t \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } 0 \leq t \leq 4,$$

beschrieben (Durchlaufrichtung beachten!). Finden Sie Parametrisierungen von γ_1 und γ_2.

Hinweis: Es gibt mehrere Lösungen.

(b) Berechnen Sie folgende Linienintegrale mithilfe der parametrisierten Wege γ_1, γ_2 und γ_3 aus Teilaufgabe (a),

i) $I_1 = \int_{\gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$,

ii) $I_2 = \int_{\gamma_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$,

iii) $I_3 = \int_{\gamma_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$,

und daraus als Summe von I_1, I_2 und I_3

$$I = \oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

4. Aufgabe

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ folgender Vektorfelder entlang der angegebenen Kurven C.

(a)

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x - y \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve C gegeben durch die Funktion $y = x^3$ auf dem Abschnitt von $(-2, -8)$ bis $(1, 1)$,

(b)

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x - y \\ x \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve C gegeben durch den Einheitskreis in der (x, y)-Ebene im Gegenuhrzeigersinn und gestartet in $(1, 0)$.

Abgabe : Vor Samstag, den 24. Mai um 12 Uhr über SAMup.

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und wählen Sie bei der Eingabe "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Übungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Es sei B ein Gebiet in der (x, y)-Ebene und $\tilde{B}$ das via Polarkoordinaten entsprechende Gebiet in der (r, φ)-Ebene. Dann ist $\iint_B xy\, dydx = \cdots$

(a) $\iint_{\tilde{B}} r\cos(\varphi)\sin(\varphi)\, drd\varphi$,

(b) $\iint_{\tilde{B}} r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\, drd\varphi$,

(c) $\iint_{\tilde{B}} 2\pi r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\, drd\varphi$,

(d) $\iint_{\tilde{B}} r^3\cos(\varphi)\sin(\varphi)\, drd\varphi$.

2. Der Flächeninhalt zwischen der Geraden $y = -x + 2$ und der Parabel $y = x^2$ ist gleich

(a) 4.5,

(b) 5.5,

(c) 6.5,

(d) 7.5.

Abgabe : Vor Samstag, den 24. Mai um 12 Uhr über Echo.