Serie 27

1. Aufgabe (Prüfung Sommer 2009)

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ seien die durch

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, && \text{für } 0 \leq t \leq \pi/2, \\
\gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/2 + 1 - t \end{pmatrix}, && \text{für } \pi/2 \leq t \leq \pi/2 + 1, \\
\gamma_3(t) &= \begin{pmatrix} t - \pi/2 - 1 \\ 0 \end{pmatrix}, && \text{für } \pi/2 + 1 \leq t \leq \pi/2 + 2,
\end{aligned}$$

parametrisierten Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ gegeben. Der Weg γ durchläuft die Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

(a) Stellen Sie die Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ graphisch dar, indem Sie diese in ein Koordinatensystem einzeichnen. Geben Sie auch die Richtung an.

(b) Berechnen Sie die folgenden Linienintegrale:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\gamma_1} -xy\,dx + x^2\,dy, \\
I_2 &= \int_{\gamma_2} -xy\,dx + x^2\,dy, \\
I_3 &= \int_{\gamma_3} -xy\,dx + x^2\,dy.
\end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabe (b) das Linienintegral

$$I = \oint_{\gamma} -xy\,dx + x^2\,dy.$$

(d) Berechnen Sie das Linienintegral I mit Hilfe des Satzes von Gauss-Green.

2. Aufgabe (Prüfung Sommer 2011)

Gegeben seien drei ebene Kurven γ_1, γ_2 und γ_3 wie in der untenstehenden Skizze. Dabei verlaufen γ_1 und γ_2 jeweils entlang von Geraden und γ_3 entlang der Kurve $y = x^3$.

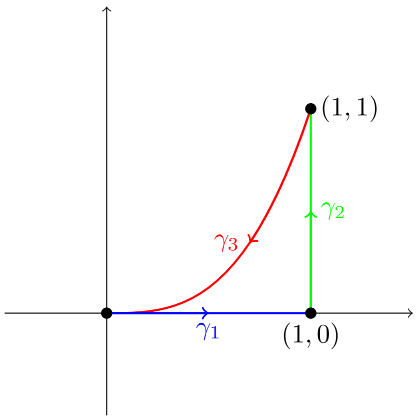

Figure 1: Die drei Wege aus Aufgabe 1.

(a) Parametrisieren Sie die Kurven γ_1, γ_2 und γ_3. Das heisst, schreiben Sie jeweils die Kurve γ_i, $(i = 1, 2, 3)$ als Funktion $[a, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma_i(t) = (x(t), y(t))$.

(b) Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale entlang der drei Kurven für das Vektorfeld $\overrightarrow{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -3y \\ 2x \end{pmatrix}$:

$$I_1 = \int_{\gamma_1} -3y\,dx + 2x\,dy,$$
$$I_2 = \int_{\gamma_2} -3y\,dx + 2x\,dy,$$
$$I_3 = \int_{\gamma_3} -3y\,dx + 2x\,dy.$$

(c) Durchlaufen wir γ_1, γ_2 und γ_3, erhalten wir eine geschlossene Kurve γ. Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabe (b) das Kurvenintegral $I = \oint_\gamma -3y\,dx + 2x\,dy$.

(d) Berechnen Sie das Kurvenintegral I mit Hilfe der Formel von Gauss-Green.

3. Aufgabe

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale zuerst direkt, dann mit Hilfe der Formel von Gauss-Green als Gebietsintegral. Die Kurve γ ist jeweils Rand des Gebiets B und durchläuft diesen in positiver Richtung.

(a) $\displaystyle\int_\gamma xy\,dx + x^2dy$, $\qquad B := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x^{2/3}\right\}$,

(b) $\displaystyle\int_\gamma (x^2 + y)\,dx$, $\qquad B := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq 4 - x^2\right\}$.

4. Aufgabe

Sei $\overrightarrow{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld und C die Kurve, die sich aus den Wegen γ_1, γ_2 und γ_3 zusammensetzt. Die Wege γ_1, γ_2 und γ_3 sind in der Skizze gegeben. Der Weg γ_1 verläuft entlang der Parabel $y = x^2$.

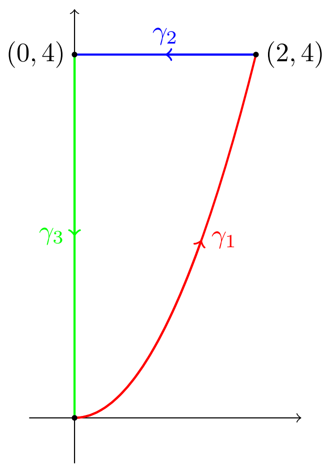

Figure 2: Die drei Wege aus Aufgabe 4.

Berechnen Sie das Linienintegral $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\vec{r}$, indem Sie die Formel von Gauss-Green benutzen.

Abgabe : Vor **Donnerstag**, den 29. Mai um 12 Uhr über SAMup.

Multiple Choice

Wichtig: Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort richtig. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und wählen Sie bei der Eingabe "Weiss ich nicht." So erhält Ihr/e Übungsleiter/in eine bessere Rückmeldung.

1. Seien D die Kreisscheibe mit Radius 4 und Mittelpunkt $(1, 0)$ und γ die (Rand-)Kreislinie im Gegenuhrzeigersinn orientiert. Für welches $\overrightarrow{F_i}$ ist $\oint_\gamma \overrightarrow{F_i} \cdot d\vec{r} = 0$?

(a) $\overrightarrow{F_1}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ -y \end{pmatrix}$,

(b) $\overrightarrow{F_2}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$,

(c) $\overrightarrow{F_3}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$,

(d) $\overrightarrow{F_4}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$.

2. Die Arbeit eines Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ entlang des Geradenstücks von $(1, 0, 0)$ nach $(-1, -1, -1)$ sei 5. Wie gross ist die Arbeit von $\overrightarrow{F}$ entlang des Geradenstücks von $(-1, -1, -1)$ nach $(1, 0, 0)$?

(a) Die Arbeit beträgt ebenfalls 5,

(b) Die Arbeit beträgt 0,

(c) Die Arbeit beträgt -5,

(d) Die Arbeit lässt sich aus den Angaben nicht berechnen.

Abgabe : Vor **Donnerstag**, den 29. Mai um 12 Uhr über Echo.