Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 2

Aufgabe 2-1. Zeigen Sie folgende Rechenregeln für Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

(a) Komplemente: $A^c \in \mathcal{F}$ und $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(b) Leere Menge: $\emptyset \in \mathcal{F}$ und $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(c) Additionsformel: $A \cup B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$ und $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

(d) Monotonie: $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

MC 2-2. Sei $\mathcal{F}$ die Borel σ-Algebra auf $[0, 1]$, definiert als die Menge aller in $[0, 1]$ enthaltenen Borel-Mengen. Welche der folgenden Mengen sind Elemente von $\mathcal{F}$? (Mehrere richtige Antworten sind möglich.)

(a) $\{0\}$

(b) $\{1/3\}$

(c) $[1/3, 2/3)$

(d) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

MC 2-3. Sei f eine Dichtefunktion und F die zugehörige Verteilungsfunktion. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Mehrere richtige Antworten sind möglich.)

(a) $f \geq 0$, aber nicht notwendigerweise $F \geq 0$.

(b) f ist rechtsstetig.

(c) $f \leq 1$.

(d) F kann unstetig sein, aber nur an endlich vielen Punkten.

MC 2-4. Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ ist dies eine Dichtefunktion:

$$f : \mathbb{R} \to [0, \infty), \qquad f(x) = \begin{cases} x - c, & x \in [0, 10], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) $c = 0$

(b) $c = 5$

(c) $c = 10$

(d) Nie

Aufgabe 2-5. Vielleicht kennen Sie das Spiel Siedler von Catan? Es wird wiederholt mit zwei Würfeln gewürfelt und die Augensumme beider Würfel bestimmt jeweils den Spielverlauf.

(a) Bestimmen Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum, welcher den Wurf von zwei Würfeln beschreibt.

(b) Berechnen Sie für jede mögliche Augensumme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass diese Augensumme auftritt.