Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 2 - Lösungen

Aufgabe 2-1. Zeigen Sie folgende Rechenregeln für Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

(a) Komplemente: $A^c \in \mathcal{F}$ und $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(b) Leere Menge: $\emptyset \in \mathcal{F}$ und $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(c) Additionsformel: $A \cup B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$ und $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

(d) Monotonie: $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Lösung: (a) Der Grundraum Ω zerfällt in disjunkte Ereignisse A und A^c:

$$\Omega = A \cup A^c, \quad \text{mit} \quad A \cap A^c = \emptyset.$$

Aus der Additivität und Normiertheit von $\mathbb{P}$ folgt

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c).$$

Durch Umformen erhält man

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

(b) Dies folgt aus (a) mit $A = \Omega$.

(c) Die Ereignisse A, B und $A \cup B$ zerfallen wie folgt in disjunkte Ereignisse:

$$\begin{aligned} A &= (A \setminus B) \cup (A \cap B), \\ B &= (B \setminus A) \cup (A \cap B), \\ A \cup B &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A). \end{aligned}$$

Aus der Additivität von $\mathbb{P}$ erhält man durch Umformen, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \setminus B) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B), \\ \mathbb{P}(B \setminus A) &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B), \\ \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) + P(B \setminus A). \end{aligned}$$

Einsetzen der ersten beiden Gleichungen in die dritte liefert

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + P(B).$$

Intuitiv zählt $P(A) + P(B)$ die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$ doppelt, weshalb sie einmal subtrahiert werden muss.

(d) Da $A \subseteq B$, lässt sich B als die disjunkte Vereinigung schreiben:

$$B = A \cup (B \backslash A)$$

Aus der Additivität und nicht-Negativität von $\mathbb{P}$ folgt

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash A) \geq \mathbb{P}(A).$$

MC 2-2. Sei $\mathcal{F}$ die Borel σ-Algebra auf $[0,1]$, definiert als die Menge aller in $[0,1]$ enthaltenen Borel-Mengen. Welche der folgenden Mengen sind Elemente von $\mathcal{F}$? (Mehrere richtige Antworten sind möglich.)

(a) $\{0\}$

(b) $\{1/3\}$

(c) $[1/3, 2/3)$

(d) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$

Lösung: Alle Antworten sind richtig.

(a) Wahr, weil $\{0\} = (0,1]^c \in \mathcal{F}$

(b) Wahr, weil $\{1/3\} = \bigcap_n (1/3 - 1/n, 1/3] \in \mathcal{F}$

(c) Wahr, weil $[1/3, 2/3) = \{1/3\} \cup \bigcup_n (1/3, 2/3 - 1/n] \in \mathcal{F}$

(d) Wahr, weil $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} = \bigcup_k \{1/k\} = \bigcup_k \bigcap_n (1/k - 1/n, 1/k] \in \mathcal{F}$

MC 2-3. Sei f eine Dichtefunktion und F die zugehörige Verteilungsfunktion. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Mehrere richtige Antworten sind möglich.)

(a) $f \geq 0$, aber nicht notwendigerweise $F \geq 0$.

(b) f ist rechtsstetig.

(c) $f \leq 1$.

(d) F kann unstetig sein, aber nur an endlich vielen Punkten.

Lösung: Keine der Antworten ist korrekt.

(a) Falsch, weil notwendigerweise $F \geq 0$.

(b) Falsch. Jede beliebige Dichtefunktion kann durch Verändern eines einzigen Werts nicht-rechtsstetig gemacht werden, die veränderte Funktion ist aber wieder eine Dichtefunktion.

(c) Falsch. Ein Gegenbeispiel ist $f = 2\,\mathbb{1}_{[0,1/2]}$.

(d) Falsch. Als Stammfunktion von f ist F stetig.

MC 2-4. Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ ist dies eine Dichtefunktion:

$$f : \mathbb{R} \to [0, \infty), \qquad f(x) = \begin{cases} x - c, & x \in [0, 10], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) $c = 0$

(b) $c = 5$

(c) $c = 10$

(d) Nie

Lösung: Nur (d) ist korrekt. Damit f nicht-negativ ist, muss $c \leq 0$ gelten. Dann kann aber die Normiertheitsbedingung nicht eingehalten werden, weil

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \geq \int_0^{10} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} = 50.$$

Aufgabe 2-5. Vielleicht kennen Sie das Spiel Siedler von Catan? Es wird wiederholt mit zwei Würfeln gewürfelt und die Augensumme beider Würfel bestimmt jeweils den Spielverlauf.

(a) Bestimmen Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum, welcher den Wurf von zwei Würfeln beschreibt.

(b) Berechnen Sie für jede mögliche Augensumme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass diese Augensumme auftritt.

Lösung:(a) Beim Werfen von zwei Würfeln sind die möglichen Fälle die geordneten Paare (x, y), wobei $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Also definieren wir den Grundraum

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2.$$

Da alle Fälle gleich wahrscheinlich sind und es ingesamt 36 Fälle gibt, definieren wir die Wahrscheinlichkeiten von Elementarereignissen als

$$\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \frac{1}{36}, \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega.$$

Die Wahrscheinlichkeit eines belieben Ereignisses $A \subseteq \Omega$ erhält man durch Summation:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

(b) Wir zählen für jede mögliche Augensumme $S = x + y$, wie oft sie in Ω vorkommt:

Augensumme	Mögliche Augenpaare	Anzahl Paare	Wahrscheinlichkeit
2	$(1, 1)$	1	$\frac{1}{36}$
3	$(1, 2), (2, 1)$	2	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
4	$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$	3	$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
5	$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$	4	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
6	$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$	5	$\frac{5}{36}$
7	$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$	6	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
8	$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$	5	$\frac{5}{36}$
9	$(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$	4	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
10	$(4, 6), (5, 5), (6, 4)$	3	$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
11	$(5, 6), (6, 5)$	2	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
12	$(6, 6)$	1	$\frac{1}{36}$