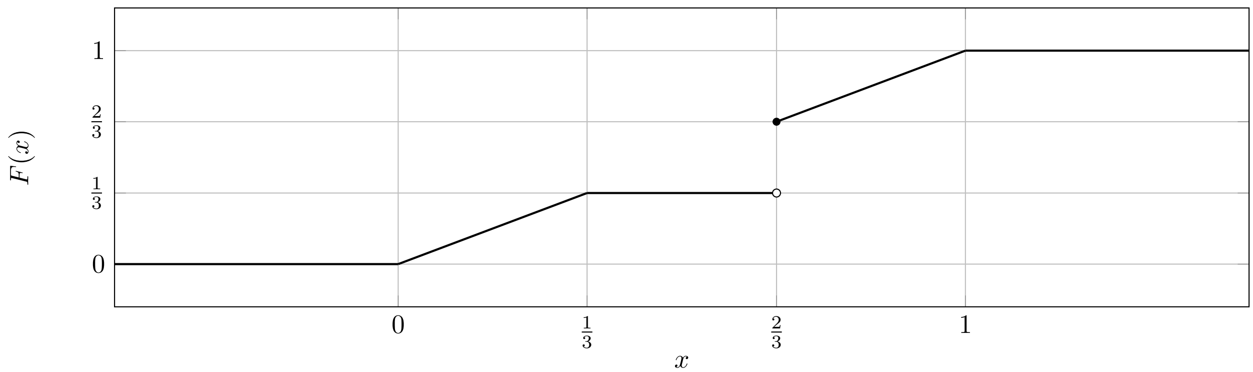
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 3 - Lösungen

MC 3-1. Betrachten Sie die folgende Verteilungsfunktion F:



Welche Eigenschaften gelten für die zugehörige Quantilsfunktion Q und das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmass $\mathbb{P}$? (Mehrere richtige Antworten sind möglich.)

(a) $Q(1/3) = 1/3$

(b) $\mathbb{P}(\{1/3\}) = 1/3$

(c) $\mathbb{P}(\{2/3\}) = 2/3$

(d) $\mathbb{P}((1/3, 2/3)) = 0$

Lösung:

(a) Richtig, denn

$$Q(1/3) = \inf\{x : F(x) \geq 1/3\} = \inf[1/3, \infty) = 1/3.$$

(b) Falsch, denn

$$\mathbb{P}(\{1/3\}) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{\epsilon>0}(1/3-\epsilon, 1/3]\Big) = \lim_{\epsilon\searrow 0}\mathbb{P}\big((1/3-\epsilon, 1/3]\big) = \lim_{\epsilon\searrow 0} F(1/3) - F(1/3-\epsilon) = 0.$$

(c) Falsch, denn

$$\mathbb{P}(\{2/3\}) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{\epsilon>0}(2/3-\epsilon, 2/3]\Big) = \lim_{\epsilon\searrow 0}\mathbb{P}\big((2/3-\epsilon, 2/3]\big) = \lim_{\epsilon\searrow 0} F(2/3) - F(2/3-\epsilon) = 1/3.$$

(d) Richtig, denn

$$\mathbb{P}\big((1/3, 2/3)\big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\epsilon>0}(1/3, 2/3-\epsilon]\Big) = \lim_{\epsilon\searrow 0}\mathbb{P}\big((1/3, 2/3-\epsilon]\big) = \lim_{\epsilon\searrow 0} F(2/3-\epsilon) - F(1/3) = 0.$$

Aufgabe 3-2. Der kleine Diego darf seine Eltern zu einer Party begleiten und möchte so lange wie möglich wach bleiben. Sein Durchhaltevermögen (wach bleiben in Stunden ab Partybeginn um 20 Uhr) sei durch die folgende Verteilungsfunktion beschrieben:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leq 0 \\ 1 - \exp(-t/3), & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

(a) Zeige, dass F tatsächlich eine Verteilungsfunktion ist.

(b) Hat F eine Dichte? Wenn ja, wie lautet diese?

(c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Diego vor Mitternacht einschläft?

(d) Um welche Uhrzeit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass Diego eingeschlafen ist, 50%?

Lösung:

(a) F ist $[0,1]$-wertig, nicht-fallend und stetig. Ausserdem gilt $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$. Also ist F eine Verteilungsfunktion.

(b) Ja, denn F ist differenzierbar mit Ableitung

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leq 0, \\ \frac{1}{3}\exp(-t/3), & \text{falls } t > 0. \end{cases}$$

(c) $\mathbb{P}((-\infty, 4]) = F(4) = 1 - \exp(-4/3) \approx 0.736$.

(d) Wir bestimmen t, so dass $P(T \leq t) = F(t) = 0.5$ gilt. Auflösen nach t liefert $t = -3\ln(0.5) \approx 2.08 \approx 2$ Stunden 5 Minuten. Die gesuchte Uhrzeit ist also ca. 22:05 Uhr.

MC 3-3. Die Ziffern 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 werden in zufälliger Reihenfolge aufgeschrieben. Welche Aussagen über die so gebildete Zahl sind korrekt? (Mehrere richtige Antworten sind möglich.)

(a) Es gibt 8! mögliche Zahlen.

(b) Die Zahl ist mit Wahrscheinlichkeit 1/2 durch 2 teilbar.

(c) Die Zahl ist mit Wahrscheinlichkeit 1/3 durch 3 teilbar.

(d) Die Zahl ist mit Wahrscheinlichkeit 1/4 durch 4 teilbar.

Lösung:

1. Richtig. Es gibt 8! Permutationen der 8 Ziffern.
2. Richtig. Die gebildete Zahl ist durch 2 teilbar, falls die letzte Ziffer z_8 gerade ist. Das trifft auf 4 von 8 Ziffern zu.
3. Falsch. Die Quersumme der gebildeten Zahl bleibt stets $2+3+4+5+6+7+8+9 = 44$, ist also nicht durch 3 teilbar. Daher ist die gebildete Zahl auch nie durch 3 teilbar.
4. Richtig. Die achtstellige Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre letzten beiden Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl ergeben. Aus den gegebenen acht Ziffern lassen sich folgende zweistellige, durch 4

teilbare Zahlen bilden:$24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92, 96$. Dies sind 14 von $8*7 = 56$ Möglichkeiten, was eine Wahrscheinlichkeit von 1/4 ergibt.

MC 3-4. In einer Klasse von 23 Schülern sind die Geburtstage zufällig über die 365 Tage des Jahrs verteilt. Genauer ist die Annahme, dass alle möglichen Verteilungen der 23 Schülergeburtstage auf die 365 Tage mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten. Alice und Bob sind zwei Schüler aus dieser Klasse. Welche Aussagen sind korrekt? (Mehrere richtige Antworten sind möglich.)

(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass heute zumindest ein Schüler Geburtstag hat, ist $1 - 1/365$.

(b) Die Wahrscheinlichkeit, dass Alice und Bob heute Geburtstag haben, ist $(1/365)^2$.

(c) Die Wahrscheinlichkeit, dass Alice und Bob am selben Tag Geburtstag haben, ist $1/365$.

(d) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Schüler am selben Tag Geburtstag haben, ist $> 1/2$.

Lösung: Wir setzen $n = 23$.

(a) Falsch. Wir haben

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{“Es gibt einen Schüler, dessen Geburtstag heute ist.”})\\ &\quad = 1 - \mathbb{P}(\text{“Niemand hat heute Geburtstag.”})\\ &\quad = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n.\end{aligned}$$

(b) Richtig. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide heute Geburtstag haben, beträgt

$$\mathbb{P}(\text{“Alice und Bob haben heute Geburtstag.”}) = \frac{1 \times 1 \times 365^{n-2}}{365^n} = \frac{1}{365} \times \frac{1}{365} \approx 7.506 \times 10^{-6}.$$

(c) Richtig. $\mathbb{P}(\text{“Alice und Bob haben am selben Tag Geburtstag.”}) = \frac{365}{365} \times \frac{1}{365} = \frac{1}{365} \approx 0.0027$.

(d) Richtig.

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{“Zwei Schüler haben am selben Tag Geburtstag.”})\\ &\quad = 1 - \mathbb{P}(\text{“Alle Schüler haben paarweise verschiedene Geburtstage.”})\\ &\quad = 1 - \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \ldots \times \frac{365 - 22}{365} = 1 - \frac{365!/342!}{365^{23}} \approx 0.507297.\end{aligned}$$

Bemerkung: Dies ist ein bekanntes Problem, das der gewöhnlichen Intuition widerspricht; siehe Wikipedia. Ab $n = 23$ beträgt die Wahrscheinlichkeit über 50%.

Aufgabe 3-5. Auf einem Cluster mit $n \geq 1$ Rechnern sollen k Aufgaben erledigt werden. Wie viele Möglichkeiten der Aufgabenverteilung gibt es jeweils unter den folgenden Annahmen?

(a) Die Rechner können maximal eine Aufgabe übernehmen und die Aufgaben sind ununterscheidbar.

(b) Die Rechner können maximal eine Aufgabe übernehmen und die Aufgaben sind unterscheidbar.

(c) Die Rechner können mehrere Aufgaben übernehmen und die Aufgaben sind ununterscheidbar.

(d) Die Rechner können mehrere Aufgaben übernehmen und die Aufgaben sind unterscheidbar.

Lösung:

(a) Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten falls $k \leq n$ und keine Möglichkeit falls $k > n$. Begründung: Wir weisen jedem der n Rechner einen Status 0 oder 1 zu, sodass k Rechner den Status 1 haben. Äquivalent wählen wir eine k-elementige Teilmenge der n Rechner. Das sind ungeordnete Stichproben ohne Wiederholung.

(b) Es gibt $n!/(n-k)!$ Möglichkeiten falls $k \leq n$ und keine Möglichkeit falls $k > n$. Begründung: Wir weisen jeder der k Aufgaben einen Rechner zu: Für die erste Aufgabe gibt es n Möglichkeiten, für die zweite $n-1$ etc. Das sind geordnete Stichprobe ohne Wiederholung.

(c) Es gibt $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten. Begründung: Wir weisen jedem der n Rechner eine gewisse Anzahl an Aufgaben zu, sodass die Gesamtanzahl k ergibt. Äquivalent wählen wir eine k-elementige Multimenge mit Elementen aus $\{1, \ldots, n\}$. Das sind ungeordnete Stichproben mit Wiederholung.

(d) Es gibt n^k Möglichkeiten. Begründung: Wir weisen jeder der k Aufgaben einen Rechner zu: Für die erste Aufgabe gibt es n Möglichkeiten, für die zweite Aufgabe wieder n Möglichkeiten, etc. Das sind geordnete Stichproben mit Wiederholung.