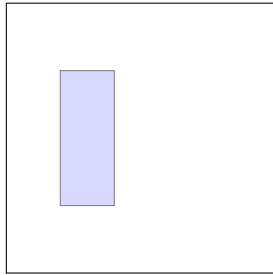


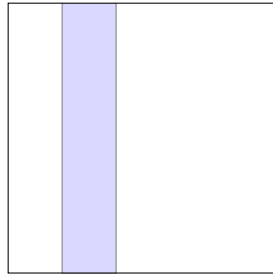
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 5 - Lösungen

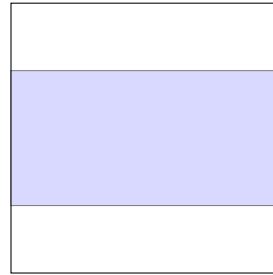
MC 5-1. Seien $X, Y : \Omega \rightarrow [0, 1]$ die Koordinatenprojektionen auf dem Einheitsquadrat $\Omega = [0, 1]^2$. Welche der folgenden Mengen A_1, A_2, A_3 und A_4 sind messbar bezüglich der von X bzw. $X+Y$ erzeugten σ -Algebra?



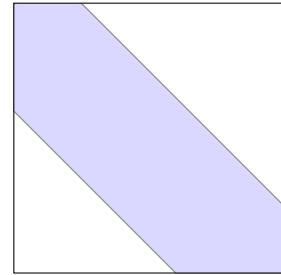
A_1



A_2



A_3



A_4

(Mehrere richtige Antworten sind möglich.)

(1) $A_1 \in \sigma(X)$

(1') $A_1 \in \sigma(X + Y)$

(2) $A_2 \in \sigma(X)$

(2') $A_2 \in \sigma(X + Y)$

(3) $A_3 \in \sigma(X)$

(3') $A_3 \in \sigma(X + Y)$

(4) $A_4 \in \sigma(X)$

(4') $A_4 \in \sigma(X + Y)$

Lösung: Nur (2) und (4') sind korrekt, aufgrund folgender Charakterisierungen:

(a) Die $\sigma(X)$ -messbaren Mengen sind Vereinigungen vertikaler Linien:

$$X^{-1}(B) = B \times [0, 1] = \bigcup_{x \in B} \{x\} \times [0, 1], \quad B \in \mathcal{B}([0, 1]).$$

(b) Die $\sigma(Y)$ -messbaren Mengen sind Vereinigungen horizontaler Linien:

$$Y^{-1}(B) = [0, 1] \times B = \bigcup_{y \in B} [0, 1] \times \{y\}, \quad B \in \mathcal{B}([0, 1]).$$

(c) Die $\sigma(X + Y)$ -messbaren Mengen sind Vereinigungen diagonalen Linien:

$$(X + Y)^{-1}(B) = \bigcup_{z \in B} \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x + y = z\}, \quad B \in \mathcal{B}([0, 1]).$$

Aufgabe 5-2. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F . Was sind die Verteilungsfunktionen des Maximums $\max\{X_1, \dots, X_n\}$ und des Minimums $\min\{X_1, \dots, X_n\}$?

Lösung: Lassen sich die Verteilungsfunktionen des Maximums und des Minimums wie folgt berechnen:

1. Verteilungsfunktion des Maximums $M_n = \max \{X_1, \dots, X_n\}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass M_n höchstens einen Wert x annimmt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass alle X_i höchstens x sind

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= P(M_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x) \cdot P(X_2 \leq x) \cdots P(X_n \leq x) \\ &= [F(x)]^n. \end{aligned}$$

2. Verteilungsfunktion des Minimums $m_n = \min \{X_1, \dots, X_n\}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass m_n mindestens x annimmt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass alle X_i mindestens x sind:

$$\begin{aligned} P(m_n \geq x) &= P(X_1 \geq x, X_2 \geq x, \dots, X_n \geq x) \\ &= P(X_1 \geq x) \cdot P(X_2 \geq x) \cdots P(X_n \geq x) \\ &= [1 - F(x)]^n. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Verteilungsfunktion von m_n als:

$$F_{m_n}(x) = P(m_n \leq x) = 1 - [1 - F(x)]^n.$$

MC 5-3. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (Mehrere richtige Antworten sind möglich.)

- (a) Wenn X gleichverteilt auf $[0, 1]$ ist, dann ist $1 - X$ ebenfalls gleichverteilt auf $[0, 1]$.
- (b) Wenn X gleichverteilt auf $[0, 1]$ ist, dann ist $-\log(X)$ exponentialverteilt.
- (c) Wenn X und Y unabhängig binomialverteilt sind, dann ist $X + Y$ ebenfalls binomialverteilt.
- (d) Wenn X und Y unabhängig exponentialverteilt sind, dann ist $\min\{X, Y\}$ ebenfalls exponentialverteilt.

Lösung:

- (a) Wahr, denn

$$\mathbb{P}(1 - X \leq x) = \mathbb{P}(X \geq 1 - x) = 1 - \mathbb{P}(X < 1 - x) = 1 - (1 - x) = x.$$

- (b) Wahr, denn

$$\mathbb{P}(-\log(X) \leq x) = \mathbb{P}(X \geq e^{-x}) = 1 - \mathbb{P}(X < e^{-x}) = 1 - e^{-x} = \int_0^x e^{-y} dy.$$

- (c) Falsch. (Anmerkung: Ausser X und Y haben denselben Verteilungsparameter p). Sei X Bernoulli-verteilt mit Parameter p und Y Bernoulli-verteilt mit Parameter q . Dann hat die Verteilung von $X + Y$ die Gewichtsfunktion

$$f_{X+Y}(z) = \begin{cases} (1-p)(1-q), & \text{für } z = 0, \\ p(1-q) + (1-p)q, & \text{für } z = 1, \\ pq, & \text{für } z = 2. \end{cases}$$

Sei zum Vergleich Z Binomial-verteilt mit Parametern $n = 2$ und r :

$$f_Z(z) = \begin{cases} (1-r)^2, & \text{für } z = 0, \\ 2r(1-r), & \text{für } z = 1, \\ r^2, & \text{für } z = 2. \end{cases}$$

Im Allgemeinen stimmt f_{X+Y} nicht mit f_Z überein. Zum Beispiel gilt für $p = 1/5$ und $q = 4/5$, dass $f_{X+Y}(2) = 4/25$. Durch Gleichsetzen mit $f_Z(2)$ erhält man $r = 2/5$, aber dann stimmt $f_{X+Y}(0) = 4/25$ nicht mit $f_Z(0) = 9/25$ überein.

(d) Wahr, denn

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min\{X, Y\} \leq z) &= 1 - \mathbb{P}(\min\{X, Y\} > z) = 1 - \mathbb{P}(X > z, Y > z) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X > z)\mathbb{P}(Y > z) = 1 - e^{-\lambda_X z} e^{-\lambda_Y z} = 1 - e^{-(\lambda_X + \lambda_Y)z}. \end{aligned}$$

MC 5-4. Welche Aussagen sind korrekt? (Mehrere richtige Antworten sind möglich.)

- (a) Eine Zufallsvariable ist nie unabhängig von sich selbst.
- (b) Wenn eine Zufallsvariable unabhängig von sich selbst ist, dann ist sie konstant.
- (c) Wenn eine Zufallsvariable konstant ist, dann ist sie unabhängig von sich selbst.
- (d) Eine Zufallsvariable ist immer unabhängig von sich selbst.

Lösung: Nur (c) ist korrekt. Im Kern steht folgendes Argument: Wenn ein Ereignis A unabhängig von sich selbst ist, dann hat es Wahrscheinlichkeit 1 oder 0, entsprechend der beiden Lösungen 1 und 0 der quadratischen Gleichung

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A).$$

- (a) Falsch, siehe (c).
- (b) Falsch. (Korrekt wäre: Wenn eine reellwertige Zufallsvariable unabhängig von sich selbst ist, dann ist sie fast sicher konstant.)

Gegenbeispiel 1: Wenn der Wahrscheinlichkeitsraum eine nicht-leere Null-Menge hat, kann eine konstante Zufallsvariable X auf dieser Null-Menge verändert werden, sodass X zwar nicht mehr konstant ist, aber alle Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X \in B)$ unverändert bleiben. Wegen (c) bleibt X unabhängig von sich selbst.

Gegenbeispiel 2: Wenn die Zielmenge von X die triviale σ -Algebra trägt, dann ist $\mathbb{P}(X \in B)$ entweder 0 oder 1, für jedes B , und somit ist jede Zufallsvariable von sich selbst unabhängig. Insbesondere sind dann auch nicht-konstante Zufallsvariablen unabhängig von sich selbst.

- (c) Wahr. Sei X eine konstante Zufallsvariable. Dann ist $\mathbb{P}(X \in B)$ entweder 0 oder 1, für alle B . Daraus folgt

$$\mathbb{P}(X \in B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(X \in B_1) \cdot \mathbb{P}(X \in B_2), \quad \text{für alle Ereignisse } B_1, B_2.$$

Dies sieht man anhand folgender Fallunterscheidung. Fall 1: Wenn $\mathbb{P}(X \in B_1)$ oder $\mathbb{P}(X \in B_2)$ Null sind, dann ist auch $\mathbb{P}(X \in B_1 \cap B_2)$ Null und es gilt Gleichheit. Fall 2: Wenn weder

$\mathbb{P}(X \in B_1)$ noch $\mathbb{P}(X \in B_1)$ Null sind, dann sind beide Wahrscheinlichkeiten gleich 1, folglich auch $\mathbb{P}(X \in B_1 \cap B_2) = 1$ und daher gilt Gleichheit. Also ist X unabhängig von sich selbst.

(d) Falsch. Sei X Bernoulli-verteilt mit Parameter $p \in (0, 1)$ und $A = B = \{1\}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(X \in A \cap B), \quad \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(X \in B) = p^2.$$

Gleichheit $p = p^2$ wäre nur bei $p = 0$ und $p = 1$ möglich, aber per Annahme gilt $p \in (0, 1)$.

MC 5-5. Unter welchen Gewichtsfunktionen f sind die Koordinatenprojektionen X und Y unabhängig? (Mehrere richtige Antworten sind möglich.)

(a) $f : \{1, \dots, 6\}^2 \rightarrow [0, \infty), f(x, y) = 1/36$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty), f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$

(c) $f : (0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty), f(x, y) = ye^{-(x+1)y}$

(d) $f : \{0, 1, 2, \dots\}^2 \rightarrow [0, \infty), f(x, y) = 1/(e^2 x! y!)$

Lösung: Die korrekten Antworten sind (a), (b) und (d). Es genügt zu überprüfen, ob die Gewichts- bzw. Dichtefunktion das Produkt der marginalen Gewichts- bzw. Dichtefunktionen ist. Äquivalent: Das Produkt irgendeiner Funktion von x mit irgendeiner Funktion von y .

(a) Wahr, denn $f(x, y) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = f_X(x) = f_Y(y)$. Anmerkung: X und Y sind unabhängig gleichverteilt auf.

(b) Wahr, denn $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$. Anmerkung: X und Y sind unabhängig standardnormalverteilt.

(c) Falsch. Begründung 1: Die Funktion e^{-xy} lässt sich nicht als Produkt einer Funktion von x mit einer Funktion von y schreiben. Begründung 2: Durch Integration erhält man $f_X(x) = 1/(1+x)^2$ und $f_Y(y) = e^{-y}$, und daher gilt $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$. Anmerkung: Y ist Gamma(1, 1)-verteilt und X ist Exp(Y)-verteilt gegeben Y .

(d) Wahr, denn $f(x, y) = \frac{1}{e x!} \cdot \frac{1}{e y!} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$. Anmerkung: X und Y sind unabhängig Poisson-verteilt.