Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 7

MC 7-1. (Unabhängige Würfe mit derselben unfairen Münze) Sei Z uniform verteilt auf $[0,1]$ und, gegeben Z, seien X und Y unabhängig Bernoulli-verteilt mit Parameter Z. Formal ist die gemeinsame Verteilung von (X,Y,Z) definiert als

$$\mathbb{P}(X=x,Y=y,Z\in A)=\int_A z^x(1-z)^{1-x}z^y(1-z)^{1-y}dz,\qquad x,y\in\{0,1\},A\in\mathcal{B}([0,1]).$$

Welche Aussagen sind korrekt? (Mehrere richtige Antworten sind möglich.)

(a) $\mathbb{P}(X=1)=1/2$

(b) $\mathbb{P}(X=1|Z)=1/2$

(c) $\mathbb{P}(Z>1/2|X=1)=1/2$

(d) $\mathbb{P}(X=1,Y=1)=1/2$

MC 7-2. (Bedingte Unabhängigkeit) Seien X, Y und Z Zufallsvariablen. Man nennt X unabhängig von Y gegeben Z, falls

$$\mathbb{P}(X\in A,Y\in B|Z)=\mathbb{P}(X\in A|Z)\,\mathbb{P}(Y\in B|Z),\qquad \text{für alle } A,B.$$

Welche Aussagen sind im Allgemeinen korrekt? (Mehrere richtige Antworten sind möglich.)

(a) Sind X und Y unabhängig, dann sind X und Y unabhängig gegeben Z.

(b) Sind X und Y unabhängig gegeben Z, dann sind X und Y unabhängig.

(c) $\mathbb{P}(X\in A|Y,Z)=\mathbb{P}(X\in A|Z)$, falls X unabhängig von Y gegeben Z ist.

(d) $\mathbb{P}(X\in A|Y,Z)=\mathbb{P}(X\in A|Y)$, falls X unabhängig von Y gegeben Z ist.

Aufgabe 7-3. (Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung) Sei T geometrisch verteilt mit Parameter $p\in(0,1)$, d.h. die Gewichtsfunktion von T ist

$$f:\{1,2,\dots\}\to[0,\infty),\qquad f(n)=(1-p)^{n-1}p.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(T\geq m+n|T\geq m)=\mathbb{P}(T\geq n),\qquad m,n\in\mathbb{N}.$$

Aufgabe 7-4. (Momenterzeugende Funktion der Normalverteilung) Sei Z standard-normalverteilt, d.h. die Dichtefunktion von Z ist

$$f:\mathbb{R}\to(0,\infty),\qquad f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{z^2}{2}\Big).$$

Berechnen Sie die sogenannte momenterzeugende Funktion von Z, definiert als

$$M:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad M(t)=\mathbb{E}(\exp(tZ)).$$

Aufgabe 7-5. (GARCH(1-1) Modell) Engle und Granger erhielten 2003 den Wirtschaftsnobelpreis für ihre Arbeit zu folgendem Modell für Aktienpreise S_t, $t \in \mathbb{N}$:

$$S_t = S_{t-1} \exp\left(\epsilon_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right), \qquad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \qquad \sigma_t = \sqrt{\omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2},$$

für unabhängige standard-normalverteilte Zufallvariablen $z_0, z_1, \ldots$ und nicht-negative reelle Zahlen $\mu, \omega, \alpha, \beta$. Zeigen Sie, dass $S_0, S_1, \ldots$ ein Martingal ist, d.h.

$$\mathbb{E}(S_t | S_0, \ldots, S_{t-1}) = S_{t-1}.$$