Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 7 - Lösungen

MC 7-1. (Unabhängige Würfe mit derselben unfairen Münze) Sei Z uniform verteilt auf $[0,1]$ und, gegeben Z, seien X und Y unabhängig Bernoulli-verteilt mit Parameter Z. Formal ist die gemeinsame Verteilung von (X,Y,Z) definiert als

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y, Z\in A) = \int_A z^x(1-z)^{1-x} z^y (1-z)^{1-y} dz, \qquad x,y\in\{0,1\}, A\in\mathcal{B}([0,1]).$$

Welche Aussagen sind korrekt? (Mehrere richtige Antworten sind möglich.)

(a) $\mathbb{P}(X=1)=1/2$

(b) $\mathbb{P}(X=1|Z)=1/2$

(c) $\mathbb{P}(Z>1/2|X=1)=1/2$

(d) $\mathbb{P}(X=1,Y=1)=1/2$

Lösung:

(a) Wahr, denn $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{E}(\mathbb{P}(X=1|Z))=\mathbb{E}(Z)=1/2$.

(b) Falsch, denn $\mathbb{P}(X=1|Z)=Z$.

(c) Falsch, denn $\mathbb{P}(Z>1/2|X=1)=\int_{1/2}^1 f_{Z|X=1}(z)\,dz=\int_{1/2}^1 2z\,dz=[z^2]_{1/2}^1=3/4$.

(d) Falsch, denn $\mathbb{P}(X=1,Y=1)=\mathbb{E}(\mathbb{P}(X=1,Y=1|Z))=\mathbb{E}(Z^2)=\int_0^1 z^2\,dz=[z^3/3]_0^1=1/3$.

MC 7-2. (Bedingte Unabhängigkeit) Seien X, Y und Z Zufallsvariablen. Man nennt X unabhängig von Y gegeben Z, falls

$$\mathbb{P}(X\in A, Y\in B|Z)=\mathbb{P}(X\in A|Z)\,\mathbb{P}(Y\in B|Z), \qquad \text{für alle } A,B.$$

Welche Aussagen sind im Allgemeinen korrekt? (Mehrere richtige Antworten sind möglich.)

(a) Sind X und Y unabhängig, dann sind X und Y unabhängig gegeben Z.

(b) Sind X und Y unabhängig gegeben Z, dann sind X und Y unabhängig.

(c) $\mathbb{P}(X\in A|Y,Z)=\mathbb{P}(X\in A|Z)$, falls X unabhängig von Y gegeben Z ist.

(d) $\mathbb{P}(X\in A|Y,Z)=\mathbb{P}(X\in A|Y)$, falls X unabhängig von Y gegeben Z ist.

Lösung:

(a) Falsch. Gegenbeispiel: Sei Z die Augensumme von unabhängigen Würfen X und Y eines Würfels. Gegeben $Z=3$ impliziert $X=1$ dass $Y=2$, und umgekehrt. Somit sind X und Y nicht unabhängig gegeben Z.

(b) Falsch. Gegenbeispiel: In Aufgabe 7-1 sind X und Y unabhängig gegeben Z aber nicht unabhängig, denn wegen (a) und (d) gilt $\mathbb{P}(X=1, Y=1) = 1/3 \neq 1/4 = P(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1)$.

(c) Wahr, denn $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X)|Z)$ erfüllt die definierende Eigenschaft von $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X)|Y,Z)$: erfüllt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X)\,\mathbb{1}_B(Y)\,\mathbb{1}_C(Z)) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X)\,\mathbb{1}_B(Y)\,\mathbb{1}_C(Z)|Z)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X)\,\mathbb{1}_B(Y)|Z)\,\mathbb{1}_C(Z)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X)|Z)\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(Y)|Z)\,\mathbb{1}_C(Z)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X)|Z)\,\mathbb{1}_B(Y)\,\mathbb{1}_C(Z)).\end{aligned}$$

(d) Falsch. Gegenbeispiel 1: In Aufgabe 7-1 ist die linke Seite wegen 7-2 (c) gleich $\mathbb{P}(X=1|Y,Z) = \mathbb{P}(X=1|Z) = Z$, die rechte Seite hingegen $\mathbb{P}(X=1|Y) = (1+Y)/3$, denn

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=1|Y=1) &= \frac{\mathbb{P}(X=1,Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}, \\ \mathbb{P}(X=1|Y=0) &= \frac{\mathbb{P}(X=1,Y=0)}{\mathbb{P}(Y=0)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Gegenbeispiel 2: Seien $X = Z$ und Y unabhängig Bernoulli-(1/2) verteilt. Dann ist die linke Seite gleich $\mathbb{1}_A(X)$ und die rechte Seite gleich $1/2$.

Aufgabe 7-3. (Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung) Sei T geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$, d.h. die Gewichtsfunktion von T ist

$$f : \{1,2,\dots\} \to [0,\infty), \qquad f(n) = (1-p)^{n-1}p.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(T \geq m+n | T \geq m) = \mathbb{P}(T \geq n), \qquad m,n \in \mathbb{N}.$$

Lösung: Die Aussage hängt nur von der Verteilung von T ab. Wir können daher annehmen, dass $T = \inf\{n : X_n = 1\}$ der Zeitpunkt des ersten Erfolges von unabhängigen gleichverteilten Bernoulli-Experimenten $X_1, X_2, \dots$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \geq m+n|T \geq m) &= \mathbb{P}(X_1 = \dots = X_{m+n-1} = 0 | X_1 = \dots = X_{m-1} = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_m = \dots = X_{m+n-1} = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = \dots = X_{n-1} = 0) \\ &= \mathbb{P}(T \geq n).\end{aligned}$$

Aufgabe 7-4. (Momenterzeugende Funktion der Normalverteilung) Sei Z standard-normalverteilt, d.h. die Dichtefunktion von Z ist

$$f : \mathbb{R} \to (0,\infty), \qquad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{z^2}{2}\Big).$$

Berechnen Sie die sogenannte momenterzeugende Funktion von Z, definiert als

$$M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad M(t) = \mathbb{E}(\exp(tZ)).$$

Lösung: Per Definition gilt

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(tz - \frac{z^2}{2}\Big) dz.$$

Durch Ergänzen auf ein Quadrat erhält man

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(\frac{t^2}{2} - \frac{(z-t)^2}{2}\Big) dz.$$

Per Substitution $y = z - t$ erhält man

$$M(t) = \exp\Big(\frac{t^2}{2}\Big) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{y^2}{2}) dy}_{},$$

wobei der geklammerte Ausdruck gleich 1 ist, weil er das Integral über die Dichte der Standardnormalverteilung ist. Daher gilt

$$M(t) = \exp\Big(\frac{t^2}{2}\Big).$$

Aufgabe 7-5. (GARCH(1-1) Modell) Engle und Granger erhielten 2003 den Wirtschaftsnobelpreis für ihre Arbeit zu folgendem Modell für Aktienpreise S_t, $t \in \mathbb{N}$:

$$S_t = S_{t-1} \exp\Big(\epsilon_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\Big), \qquad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \qquad \sigma_t = \sqrt{\omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2},$$

für unabhängige standard-normalverteilte Zufallvariablen $z_0, z_1, \ldots$ und nicht-negative reelle Zahlen $\mu, \omega, \alpha, \beta$. Zeigen Sie, dass $S_0, S_1, \ldots$ ein Martingal ist, d.h.

$$\mathbb{E}(S_t | S_0, \ldots, S_{t-1}) = S_{t-1}.$$

Lösung: Wir definieren sigma-Algebren

$$\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(S_0, \ldots, S_{t-1}), \qquad \mathcal{G}_{t-1} = \sigma(S_0, \ldots, S_{t-1}, \epsilon_0, \ldots, \epsilon_{t-1}, \sigma_0, \ldots, \sigma_{t-1}).$$

Da σ_t messbar bezüglich $\mathcal{G}_{t-1}$ ist, gilt unter Zuhilfenahme von Aufgabe 7-4:

$$\mathbb{E}(S_t | \mathcal{G}_{t-1}) = S_{t-1}\mathbb{E}(\exp(\sigma_t z_t) | \mathcal{G}_{t-1}) \exp(-\sigma_t^2/2) = S_{t-1}.$$

Da $\mathcal{F}_{t-1} \subseteq \mathcal{G}_{t-1}$, gilt

$$\mathbb{E}(S_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(S_t | \mathcal{G}_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(S_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) = S_{t-1}.$$