Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 8 - Lösungen

MC 8-1. (Gesetz der grossen Zahlen) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und uniform verteilt auf $[0,1]$. Welche Aussagen sind korrekt? (Mehrere Antworten sind möglich.)

(a) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \to \frac{1}{2}$ fast sicher

(b) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{2}) \to 0$ fast sicher

(c) $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i \to \frac{1}{2}$ fast sicher

(d) $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{2}) \to 0$ fast sicher

Lösung: Nur (a) und (b) sind wahr.

(a) Wahr, wegen Gesetz großer Zahlen.

(b) Wahr, wegen Gesetz großer Zahlen.

(c) Falsch, denn sonst ginge $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{2})$ fast sicher gegen $-\infty$, daher auch in Verteilung gegen $-\infty$, was aber wegen des zentralen Grenzwertsatzes nicht stimmt.

(d) Falsch, denn sonst ginge $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{2})$ auch in Verteilung gegen Null, was aber wegen des zentralen Grenzwertsatzes nicht stimmt.

MC 8-2. (Zentraler Grenzwertsatz) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und uniform verteilt auf $[0,1]$ und sei Z standard-normalverteilt. Welche Aussagen sind korrekt? (Mehrere Antworten sind möglich.)

(a) $\mathbb{P}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i > \frac{1}{2}) \to 0$

(b) $\mathbb{P}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{2}) > \frac{1}{2}) \to 0$

(c) $\mathbb{P}(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i > \frac{1}{2}) \to \mathbb{P}(Z > \frac{1}{2})$

(d) $\mathbb{P}(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{2}) > \frac{1}{2}) \to \mathbb{P}(Z > \frac{1}{2})$

Lösung: Nur (b) ist wahr.

(a) Falsch, denn aus Symmetrie-Gründen gilt $\mathbb{P}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

(b) Wahr.

Allgemeines Argument. Wegen des Gesetzes großer Zahlen konvergiert $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{2})$ fast sicher gegen Null und das impliziert Konvergenz in Wahrscheinlichkeit gegen Null.

Spezielles Argument. Aus $X_i \in [0,1]$ folgt $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}$. Die angegeben Wahrscheinlichkeit ist also 0, für alle n.

(c) Falsch.

Intuition Der Term $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i$ ist die Summe aus $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \frac{1}{2})$, was in Verteilung konvergiert, und $\sqrt{n}/2$, was gegen ∞ geht. Daher geht die angegebene Wahrscheinlichkeit gegen 1.

Formales Argument Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i > \tfrac{1}{2}\Big) &= \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \big(X_i - \tfrac{1}{2}\big) > \tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2}\big) \\ &\geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \tfrac{1}{2}) > -k\Big) = \mathbb{P}(Z \geq -k).\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist beliebig nahe an 1, für hinreichend grosses k. Daher konvergiert $\mathbb{P}(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i > \frac{1}{2})$ gegen 1.

(d) Falsch. Der korrekte Limes ist $\mathbb{P}(Z > \frac{1}{2})$ für $Z \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1))$, wobei

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = \int_0^1 \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 dx = \left[\frac{1}{3}\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^3\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Aufgabe 8-3. (Nicht-lineare Regression, Supervised Learning)

(a) Sei P die Verteilung von (X, Y), für X uniform verteilt auf $[0, 1]$ und für Y gegeben X normalverteilt mit Mittelwert $\sin(X)$ und Varianz 1. Welche stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ minimieren $E((Y - f(X))^2)$, wobei E den Erwartungswert unter P bezeichnet?

(b) Sei P_n die empirische Verteilung der unabhängigen P-verteilten Zufallsvariablen $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$. Welche Funktionen $f \in C([0, 1])$ minimieren $E_n((Y - f(X))^2)$, wobei E_n den Erwartungswert unter P_n bezeichnet?

Konvergieren für grosses n die Minimierer von (b) gegen Minimierer von (a)?

Lösung:

(a) Der eindeutige Minimierer ist die Funktion $f^*(x) = \sin(x)$. Sie minimiert $E((Y - f(X))^2)$ über alle messbaren Funktionen f, und somit insbesondere über alle stetigen Funktionen f, weil $f^*(X) = \mathbb{E}(Y|X)$. Der Minimierer ist eindeutig bis auf Borel-Nullmengen und wegen der zusätzlich geforderten Stetigkeit insgesamt eindeutig.

(b) Jede stetige Funktion f^* mit $f^*(X_1) = Y_1, \ldots, f^*(X_n) = Y_n$ ist ein Minimierer, aus folgendem Grund. Die Zufallsvariablen X_i sind fast sicher paarweise verschieden. Daher ist Y gegeben X fast sicher konstant und es folgt $E_n(Y|X) = Y$. Eine Funktion f erfüllt $Y = f(X)$ genau dann, wenn $f(X_1) = Y_1, \ldots, f(X_n) = Y_n$.

Minimierer von (b) sind nur auf n Punkten eindeutig bestimmt und können daher beliebig weit vom Minimierer von (a) abweichen. Somit gibt es im Allgemeinen keine Konvergenz der Minimierer.

Anmerkung: Das Problem lässt sich z.B. durch Einschränken auf Funktionen mit $|f'(x)| \leq 1$ beheben.

Aufgabe 8-4. (Poisson-Verteilung) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei X_n binomialverteilt mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und λ/n. Dementsprechend kann X_n als Summe von unabhängigen Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen mit linear abnehmender Erfolgswahrscheinlichkeit gesehen werden. Zeigen Sie, dass X_n in Verteilung gegen die Poisson-Verteilung konvergiert, d.h.

$$\forall k \in \{0, 1, \dots\}: \qquad \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Anmerkung: Das Beispiel illustriert, dass neben dem Gesetz der grossen Zahlen und dem zentralen Grenzwertsatz zahlreiche weitere Limiten von Interesse sein können; hier etwa ein Limes seltener Ereignisse.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}}_{\to 1} \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8-5. (Monte Carlo Approximation von π) Beweisen Sie, dass der Monte-Carlo Algorithmus [1] numerische Approximationen π_n liefert, sodass $\mathbb{E}(\pi_n) = \pi$ und $\mathbb{E}((\pi_n - \pi)^2) \leq 3/n$.

Lösung: Die Approximationen lauten

$$\pi_n = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_B(X_i), \qquad X_1, X_2, \dots \text{ unabhängig uniform auf } [-1,1]^2, \qquad B = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}.$$

Die Zufallsvariablen $\mathbb{1}_B(X_i)$ sind Bernoulli-verteilt mit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X_i)) &= P(\|X_i\| \leq 1) = \cdot(\text{Fläche von } B) \,/\, (\text{Fläche von } [-1,1]^2) = \frac{\pi}{4}, \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbb{1}_B(X_i)) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X_i))\big(1 - \mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X_i))\big) = \frac{\pi}{4}\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big) \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für den Erwartungswert und die Varianz von π_n:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\pi_n) &= 4\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X_1)) = \pi, \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}(\pi_n) &= \frac{16}{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbb{1}_B(X_1)) \leq \frac{16}{n} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{n}.
\end{aligned}$$

References

[1] Philipp Harms. *Monte Carlo Methods*. Verfügbar unter: `https://gist.github.com/philipp-harms/0404a6cd648be8fc59df4bc06794a566`. April 2025.