D-MATH

Probeprüfung Grundstrukturen

401-1032-00L

Nachname
XX

Vorname
XX

Legi-Nr.
XX-000-000

Prüfungs-Nr.
000

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 0 (Multiple Choice)

0.MC0 (logische Formel) Sei $\mathcal{L}$ eine Signatur und P ein Relationssymbol (in der Signatur $\mathcal{L}$) der Stelligkeit 1. Wir betrachten die folgende logische Formel in Präfixform:

$$\exists x \wedge \forall x \vee \exists x \, Px = xy = xz$$

Durch welchen Quantor wird die Variable x an der roten Stelle (rechts in der Formel) gebunden?

(A) $\exists x$ (schwarz, ganz links in der Formel)

(B) $\forall x$

(C) $\exists x$ (blau, in der Mitte der Formel)

(D) Keinen. (Die Variable x wird an der roten Stelle nicht gebunden.)

0.MC1 (Modell) Erinnerung: Die Signatur der Gruppentheorie ist $\mathcal{L}_{\mathrm{GT}} := \{e, \circ\}$. Zwei der Axiome der Gruppentheorie sind gegeben durch:

$\mathsf{GT}_0 :\quad \forall x \forall y \forall z \big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z \big)$
$\mathsf{GT}_2 :\quad \forall x \exists y (y \circ x = e)$

Seien $\boldsymbol{e}, \alpha, \beta$ verschiedene Objekte. Wir definieren den Bereich $A := \{\boldsymbol{e}, \alpha, \beta\}$ und die Abbildung $\boldsymbol{\circ} : A^2 = A \times A \to A$ durch die folgende Verknüpfungstabelle:

$\boldsymbol{\circ}$	$\boldsymbol{e}$	α	β
$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{e}$	α	β
α	$\boldsymbol{e}$	α	β
β	$\boldsymbol{e}$	α	β

Wir definieren die Abbildung $\mathbf{M}$ auf $\mathcal{L}_{\mathrm{GT}}$ durch

$$e^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}(e) :\equiv \boldsymbol{e}, \qquad \circ^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}(\circ) :\equiv \boldsymbol{\circ}.$$

Das Paar $(A, \mathbf{M})$ ist

(A) *kein* Modell von GT_0 und *kein* Modell von GT_2.

(B) *kein* Modell von GT_0 und ein Modell von GT_2.

(C) ein Modell von GT_0 und *kein* Modell von GT_2.

(D) ein Modell von GT_0 und ein Modell von GT_2.

0.MC2 (Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre) Wir bezeichnen mit ZF das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem und definieren die einstelligen Relationssymbole fin und P durch

$$\operatorname{fin} x :\leftrightarrow x \text{ ist endlich.}$$
$$Px :\leftrightarrow x \text{ enthält genau ein Element.}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(A) $\mathrm{ZF} \vdash \exists x \forall z (z \in x)$

(B) $\mathrm{ZF} \vdash \exists x \forall z \Big(\operatorname{fin} z \to z \in x \Big)$

(C) $\mathrm{ZF} \vdash \exists x \forall z \Big(Pz \to z \in x \Big)$

(D) keine der obigen drei Aussagen

0.MC3 (Ordinalzahl) Wir schreiben ω für die Menge der natürlichen Zahlen. Welche der folgenden Mengen ist *keine* Ordinalzahl?

(A) $\{\{\{\}\}\}$

(B) $\Big\{\{\}, \{\}\Big\}$

(C) $\Big\{\{\}, \Big\{\{\}, \{\}\Big\}, \{\}\Big\}$

(D) $\Big\{\{\omega\} \cup \omega\Big\} \cup \{\omega\} \cup \omega$

0.MC4 (Injektion, Surjektion, Bijektion) Wir bezeichnen mit ZFC das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem zusammen mit dem Auswahlaxiom und betrachten die folgenden Aussagen:

P: "In ZFC gilt: Seien X, Y Mengen, sodass es eine Injektion von X nach Y und eine Surjektion (:= surjektive Funktion) von X nach Y gibt. Dann gibt es eine Bijektion von X nach Y."

Q: "In ZFC gilt: Seien X, Y Mengen, sodass es eine Surjektion von X nach Y und eine Surjektion von Y nach X gibt. Dann gibt es eine Bijektion von X nach Y."

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(A) P ist falsch und Q ist falsch.

(B) P ist wahr und Q ist falsch.

(C) P ist falsch und Q ist wahr.

(D) P ist wahr und Q ist wahr.

0.MC5 (Ordinal- und Kardinalzahl) Welche der folgenden Aussagen[1] ist in ZFC wahr?[2]

(A) $\omega \cup \{\omega\}$ ist *keine* Ordinalzahl und *keine* Kardinalzahl.

(B) $\omega \cup \{\omega\}$ ist eine Ordinalzahl und *keine* Kardinalzahl.

(C) $\omega \cup \{\omega\}$ ist *keine* Ordinalzahl und eine Kardinalzahl.

(D) $\omega \cup \{\omega\}$ ist eine Ordinalzahl und eine Kardinalzahl.

0.MC6 (modulare Arithmetik) Welchen Rest lässt 111^{126} beim Teilen durch 127?

(A) 0

(B) 1

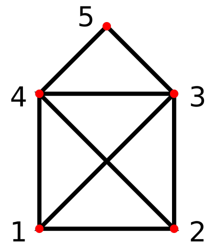
(C) 2

(D) 126

[1] Wir wechseln hier zur in der Mathematik üblichen Sichtweise, dass ein Satz, d. h. eine geschlossene Formel, eine Aussage ist. Das ist nicht wörtlich der Fall. Strikt genommen wird ein Satz erst durch eine Interpretation zu einer Aussage.

[2] Damit meinen wir, dass die Aussage in jedem Modell von ZFC wahr ist.

0.MC7 (Eulerscher Kantenzug, Eulertour) Wir betrachten den folgenden (ungerichteten) Graphen G:



(Die Knoten dieses Graphen sind die roten Punkte $1, \ldots, 5$. Die schwarzen Strecken zwischen den Knoten sind die Kanten.) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(A) In G gibt es *keinen* offenen Eulerschen Kantenzug und *keine* Eulertour.

(B) In G gibt es einen offenen Eulerschen Kantenzug und *keine* Eulertour.

(C) In G gibt es *keinen* offenen Eulerschen Kantenzug, und es gibt eine Eulertour.

(D) In G gibt es einen offenen Eulerschen Kantenzug und eine Eulertour.

Aufgabe 1 (formaler Beweis einer Formel)

Seien α und β (wohlgebildete logische) Formeln. Beweisen Sie die Formel $\alpha \wedge \beta$ formal aus der Menge von Formeln $\{\alpha, \beta\}$.

Aufgabe 2 (Wohlordnungsprinzip und Auswahlaxiom)

Zeigen Sie, dass aus ZF und dem Wohlordnungsprinzip WOP das Auswahlaxiom AC folgt.

Aufgabe 3 (multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}_{127}^{\times}$)

3.A1 Zeigen Sie, dass die Restklasse $[93] := [93]_{127}$ in $\mathbb{Z}_{127}^{\times}$ liegt.

3.A2 Zeigen Sie, dass das Element $[93]$ von $\mathbb{Z}_{127}^{\times}$ ein Inverses bezüglich der Multiplikation $\cdot_{127}$ besitzt.

Bemerkung: Falls Sie dazu ein Resultat X aus der Vorlesung verwenden, beweisen Sie dann den relevanten Teil von X nochmals. Falls Sie dazu ein weiteres Resultat Y aus der Vorlesung verwenden, brauchen Sie Y nicht zu beweisen.

Aufgabe 4 (Extensionalitätsaxiom)

Wir betrachten die Signatur $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}} = \{\in\}$. Wir bezeichnen mit ZF_1 das Extensionalitätsaxiom der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre.

4.A1 Was bedeutet die $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$-Formel

$$\varphi :\equiv \forall x \forall y \Big(\forall z (z \notin x) \wedge \forall z (z \notin y) \to x = y \Big)$$

intuitiv?

4.A2 Zeigen Sie mittels eines semantischen Beweises, dass

$$\mathrm{ZF}_1 \vdash \varphi \tag{1}$$

Aufgabe 5 (Satz von Cantor)

Zeigen das folgende Theorem.

THEOREM 1 *(Satz von Cantor) In* ZF *gilt: Für jede Menge A gibt es keine surjektive Abbildung von A nach ${}^{A}2$.*

Aufgabe 6 (Dedekind-Schnitt)

Wir definieren

$$\sqrt{\mathbf{2}} := \left\{ r \in \mathbb{Q} \,\middle|\, r \geq 0,\, r^2 > 2 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\sqrt{\mathbf{2}}$ eine reelle Zahl ist, d. h. ein Dedekind-Schnitt.

Tipp: Um die letzte Bedingung in der Definition eines Dedekind-Schnittes x zu überprüfen, betrachten Sie zu gegebenem $r \in x$ die Zahl $s_0 := \dfrac{2r+2}{r+2}$.

Aufgabe 7 (Existenz einer Basis eines Vektorraumes)

Zeigen Sie, dass in ZFC jeder Vektorraum[3] eine Basis besitzt.

Hinweise:

- Verwenden Sie ein THEOREM aus der Vorlesung zum Auswahlaxiom.
- Die Inklusionsrelation auf der Potenzmenge einer Menge ist eine Halbordnung.
  Bemerkung: Sie brauchen das hier nicht zu beweisen.
- Sei F ein Körper und V ein F-Vektorraum. Wir definieren
  $$P := \left\{ \text{linear unabhängige Teilmenge von } V \right\}.$$
- **Behauptung 1** *Jedes $\subseteq$-maximale Element von P ist ein Erzeugendensystem für V.*
  Beweisen Sie diese Behauptung mittels Kontraposition.
  Bemerkung: Sie dürfen Folgendes ohne Beweis verwenden: Sei $S \subseteq V$ linear unabhängig und $v \in V$ ein Vektor, der nicht in der linearen Hülle von S liegt. Dann ist $S \cup \{v\}$ linear unabhängig.

Aufgabe 8 (abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen)

Zeigen Sie, dass in ZFC die Vereinigung jeder abzählbaren Kollektion (= Menge) $\mathcal{A}$ abzählbarer Mengen abzählbar ist.

Hinweise:

[3] über jedem Körper

- Wir definieren

  $$\begin{aligned} X_A &:= \Big\{ g \in {}^{\omega}A \,\Big|\, g \text{ ist surjektiv} \Big\}, \qquad \text{für } A \in \mathcal{A}, \\ \mathcal{X} &:= \Big\{ X_A \,\Big|\, A \in \mathcal{A} \Big\}. \end{aligned}$$

  Das sind Mengen.

  Bemerkung: Sie brauchen das nicht zu beweisen.

- Finden Sie eine Funktion

  $$G : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{X},$$

  sodass $G(A) \in X_A$, für jedes $A \in \mathcal{A}$.

- Verwenden Sie G und Abzählbarkeit von $\mathcal{A}$, um eine surjektive Funktion

  $$H : \omega \times \omega \to \bigcup \mathcal{A}$$

  zu konstruieren.

- Verwenden Sie, dass es in ZF eine surjektive Funktion von ω nach $\omega \times \omega$ gibt.

  Bemerkung: Sie brauchen das nicht zu beweisen.