Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 0 (Multiple Choice)

0.MC0 (logische Formel) Sei $\mathcal{L}$ eine Signatur und P ein Relationssymbol (in der Signatur $\mathcal{L}$) der Stelligkeit 1. Wir betrachten die folgende logische Formel in Präfixform:

$$\exists x \wedge \forall x \vee \exists x \, Px = xy = xz$$

Durch welchen Quantor wird die Variable x an der roten Stelle (rechts in der Formel) gebunden?

(A) **TRUE:** $\exists x$ (schwarz, ganz links in der Formel)

(B) $\forall x$

(C) $\exists x$ (blau, in der Mitte der Formel)

(D) Keinen. (Die Variable x wird an der roten Stelle nicht gebunden.)

Begründung: Der Bereich des Quantors $\exists x$ ist Px. Der Bereich des Quantors $\forall x$ ist $\vee \exists x \, Px = xy$. Der Bereich des Quantors $\exists x$ ist $\wedge \forall x \vee \exists x \, Px = xy = xz$. Der schwarze Quantor $\exists x$ ist daher derjenige mit dem kleinsten Bereich, worin x an der roten Stelle vorkommt. Daher bindet dieser Quantor die Variable x an der roten Stelle.

0.MC1 (Modell) Erinnerung: Die Signatur der Gruppentheorie ist $\mathcal{L}_{\mathrm{GT}} := \{e, \circ\}$. Zwei der Axiome der Gruppentheorie sind gegeben durch:

GT_0 : $\forall x \forall y \forall z \big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z \big)$
GT_2 : $\forall x \exists y (y \circ x = e)$

Seien $\boldsymbol{e}, \alpha, \beta$ verschiedene Objekte. Wir definieren den Bereich $A := \{\boldsymbol{e}, \alpha, \beta\}$ und die Abbildung $\boldsymbol{\circ} : A^2 = A \times A \to A$ durch die folgende Verknüpfungstabelle:

$\boldsymbol{\circ}$	$\boldsymbol{e}$	α	β
$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{e}$	α	β
α	$\boldsymbol{e}$	α	β
β	$\boldsymbol{e}$	α	β

Wir definieren die Abbildung $\mathbf{M}$ auf $\mathcal{L}_{\mathrm{GT}}$ durch

$$e^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}(e) :\equiv \boldsymbol{e}, \qquad \circ^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}(\circ) :\equiv \boldsymbol{\circ}.$$

Das Paar $(A, \mathbf{M})$ ist

(A) *kein* Modell von GT_0 und *kein* Modell von GT_2.

(B) *kein* Modell von GT_0 und ein Modell von GT_2.

(C) **TRUE:** ein Modell von GT_0 und *kein* Modell von GT_2.

(D) ein Modell von GT_0 und ein Modell von GT_2.

Begründung: Seien $a, b, c \in A$. Aus der Verknüpfungstabelle folgt, dass

$$a \circ (b \circ c) \equiv a \circ c \equiv c \equiv (a \circ b) \circ c.$$

Daraus folgt, dass $(A, \mathbf{M})$ ein Modell von GT_0 ist.

Für jedes $b \in A$ gilt $b \circ \alpha = \alpha \not\equiv \boldsymbol{e}$. Daher besitzt α kein Linksinverses. Daraus folgt, dass $(A, \mathbf{M})$ kein Modell von GT_2 ist.

0.MC2 (Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre) Wir bezeichnen mit ZF das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem und definieren die einstelligen Relationssymbole fin und P durch

$$\begin{aligned} \operatorname{fin} x &:\leftrightarrow x \text{ ist endlich.} \\ Px &:\leftrightarrow x \text{ enthält genau ein Element.} \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(A) $\mathrm{ZF} \vdash \exists x \forall z (z \in x)$

(B) $\mathrm{ZF} \vdash \exists x \forall z \Big(\operatorname{fin} z \to z \in x \Big)$

(C) $\mathrm{ZF} \vdash \exists x \forall z \Big(Pz \to z \in x \Big)$

(D) **TRUE:** keine der obigen drei Aussagen

Begründung: Wir nehmen ZF an.

(A): Gemäss der Russellschen Antinomie gibt es keine Menge, die genau die Elemente enthält, die sich selbst nicht als Element enthalten. Mit Hilfe des Aussonderungsaxioms folgt daraus, dass es keine Menge gibt, die jede Menge als Element enthält, d. h. $\nexists x \forall z (z \in x)$.

(C): Wir nehmen widerspruchsweise an, dass $\exists x \forall z \Big(Pz \to z \in x \Big)$, d. h., dass es eine Menge x gibt, die alle Einpunktmengen (als Elemente) enthält. Die Vereinigungsmenge von x, d. h. die Vereinigung aller Mengen in x, ist die "Allmenge", d. h. die Menge, die jede Menge als Element enthält. Diese "Menge" existiert gemäss (A) nicht. Wir erhalten also einen Widerspruch. Daher gilt $\nexists x \forall z \Big(Pz \to z \in x \Big)$.

(B): Wir nehmen widerspruchsweise an, dass $\exists x \forall z \Big(\operatorname{fin} z \to z \in x \Big)$. Mit Hilfe des Aussonderungsaxioms folgt daraus, dass es die Menge aller Einpunktmengen gibt. Das widerspricht (C). Daher gilt $\nexists x \forall z \Big(\operatorname{fin} z \to z \in x \Big)$.

Da (A,B,C) nicht gelten, gilt (D).

0.MC3 (Ordinalzahl) Wir schreiben ω für die Menge der natürlichen Zahlen. Welche der folgenden Mengen ist *keine* Ordinalzahl?

(A) **TRUE:** $\{\{\{\}\}\}$

(B) $\Big\{ \{\}, \{\} \Big\}$

(C) $\Big\{ \{\}, \big\{ \{\}, \{\} \big\}, \{\} \Big\}$

(D) $\Big\{ \{\omega\} \cup \omega \Big\} \cup \{\omega\} \cup \omega$

Begründung: Erinnerung: Eine Ordinalzahl ist eine Menge α mit den folgenden Eigenschaften:

- α ist transitiv.
- Je zwei Elemente von α sind $\in$-vergleichbar.
- Jede nichtleere Teilmenge von α besitzt ein $\in$-minimales Element.

(A): Wir schreiben $y := \{\{\}\}$. Es gilt $x := \{\{\{\}\}\} = \{y\}$, $\emptyset = \{\} \in y$, aber $\emptyset \notin x$ und daher $y \not\subseteq x$. Da $y \in x$, ist x daher nicht transitiv und daher keine Ordinalzahl.

(B): Die Menge $\{\{\}, \{\}\} = \Big\{\{\} = \emptyset = 0\Big\} = 1$ ist eine natürliche Zahl und daher eine Ordinalzahl. Siehe Übungsserie 9 (ω und jede natürliche Zahl sind Ordinalzahlen). Alternativ können wir die Eigenschaften einer Ordinalzahl von Hand überprüfen.

(C): Die Menge $\Big\{\{\}, \Big\{\{\}, \{\}\Big\}, \{\}\Big\} = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\} = \{0, 1\} = 2$ ist eine natürliche Zahl und daher eine Ordinalzahl. Alternativ können wir die Eigenschaften einer Ordinalzahl von Hand überprüfen.

(D): Die Menge ω ist eine Ordinalzahl. (Siehe Übungsserie 9 (ω und jede natürliche Zahl sind Ordinalzahlen)). Die Menge $\Big\{\{\omega\} \cup \omega\Big\} \cup \{\omega\} \cup \omega = \omega \cup \{\omega\} \cup \Big\{\omega \cup \{\omega\}\Big\} = \mathrm{s}(\omega) \cup \{\mathrm{s}(\omega)\} = \mathrm{s}(\mathrm{s}(\omega))$ ist der Nachfolger des Nachfolgers der Ordinalzahl ω und daher eine Ordinalzahl.

0.MC4 (Injektion, Surjektion, Bijektion) Wir bezeichnen mit ZFC das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem zusammen mit dem Auswahlaxiom und betrachten die folgenden Aussagen:

P: "In ZFC gilt: Seien X, Y Mengen, sodass es eine Injektion von X nach Y und eine Surjektion (:= surjektive Funktion) von X nach Y gibt. Dann gibt es eine Bijektion von X nach Y."

Q: "In ZFC gilt: Seien X, Y Mengen, sodass es eine Surjektion von X nach Y und eine Surjektion von Y nach X gibt. Dann gibt es eine Bijektion von X nach Y."

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(A) P ist falsch und Q ist falsch.

(B) P ist wahr und Q ist falsch.

(C) P ist falsch und Q ist wahr.

(D) **TRUE:** P ist wahr und Q ist wahr.

Begründung: In ZFC gilt für alle Mengen X und Y: Wenn es eine Surjektion von X nach Y gibt, dann gibt es eine Injektion von Y nach X. (Siehe Übungsserie 9, surjektive und injektive Funktion, Auswahlaxiom). Gemäss dem Satz von Cantor-Bernstein-Schröder gilt in ZF für alle Mengen X und Y: Falls es eine Injektion von X nach Y und eine Injektion von Y nach X gibt, dann gibt es eine Bijektion zwischen X und Y. Es folgt, dass sowohl P als auch Q wahr sind.

0.MC5 (Ordinal- und Kardinalzahl) Welche der folgenden Aussagen[1] ist in ZFC wahr?[2]

(A) $\omega \cup \{\omega\}$ ist *keine* Ordinalzahl und *keine* Kardinalzahl.

(B) **TRUE:** $\omega \cup \{\omega\}$ ist eine Ordinalzahl und *keine* Kardinalzahl.

[1] Wir wechseln hier zur in der Mathematik üblichen Sichtweise, dass ein Satz, d. h. eine geschlossene Formel, eine Aussage ist. Das ist nicht wörtlich der Fall. Strikt genommen wird ein Satz erst durch eine Interpretation zu einer Aussage.

[2] Damit meinen wir, dass die Aussage in jedem Modell von ZFC wahr ist.

(C) $\omega \cup \{\omega\}$ ist *keine* Ordinalzahl und eine Kardinalzahl.

(D) $\omega \cup \{\omega\}$ ist eine Ordinalzahl und eine Kardinalzahl.

Begründung: Die Menge $\omega \cup \{\omega\}$ ist der Nachfolger von ω. Da ω eine Ordinalzahl ist, folgt, dass $\omega \cup \{\omega\}$ eine Ordinalzahl ist. Diese Menge ist keine Kardinalzahl, da sie gleichmächtig zur kleineren Ordinalzahl ω ist. (Finden Sie eine Bijektion zwischen ω und $\omega \cup \{\omega\}$!)

0.MC6 (modulare Arithmetik) Welchen Rest lässt 111^{126} beim Teilen durch 127?

(A) 0

(B) **TRUE:** 1

(C) 2

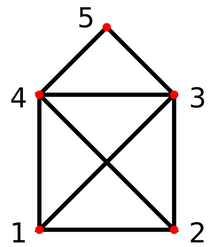
(D) 126

Begründung: Wir bezeichnen mit φ die Eulersche φ-Funktion. Die Zahl $p := 127$ ist prim, da die Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11$ die Zahl p nicht teilen und es keine weitere Primzahl kleiner als $\sqrt{p}$ gibt. Daraus folgt, dass $a := 111$ und p teilerfremd sind und $\varphi(p) = p - 1 = 126$. Gemäss dem Satz von Euler gilt daher

$$111^{126} = a^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod{p = 127}.$$

Beim Teilen durch 127 lässt 111^{126} daher den Rest 1.

0.MC7 (Eulerscher Kantenzug, Eulertour) Wir betrachten den folgenden (ungerichteten) Graphen G:



(Die Knoten dieses Graphen sind die roten Punkte $1, \ldots, 5$. Die schwarzen Strecken zwischen den Knoten sind die Kanten.) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(A) In G gibt es *keinen* offenen Eulerschen Kantenzug und *keine* Eulertour.

(B) **TRUE:** In G gibt es einen offenen Eulerschen Kantenzug und *keine* Eulertour.

(C) In G gibt es *keinen* offenen Eulerschen Kantenzug, und es gibt eine Eulertour.

(D) In G gibt es einen offenen Eulerschen Kantenzug und eine Eulertour.

Begründung: Der Graph G besitzt genau zwei Knoten mit ungeradem Grad, nämlich die Knoten 1 und 2. Gemäss einem Satz aus der Vorlesung besitzt G daher einen offenen Eulerschen Kantenzug.

Da nicht jeder Knoten des Graphen G geraden Grad besitzt, besitzt G gemäss einem Satz aus der Vorlesung keine Eulertour.

Aufgabe 1 (formaler Beweis einer Formel)

Seien α und β (wohlgebildete logische) Formeln. Beweisen Sie die Formel $\alpha \wedge \beta$ formal aus der Menge von Formeln $\{\alpha, \beta\}$.

Lösung:

$$
\begin{array}{lrl}
\varphi_0 : & \beta & \\
\varphi_1 : & \beta \to \big(\alpha \to (\alpha \wedge \beta)\big) & \text{Instanziierung von } \mathrm{L}_5 \\
\varphi_2 : & \alpha \to (\alpha \wedge \beta) & \text{aus } \varphi_1, \varphi_0 \text{ mit (MP)} \\
\varphi_3 : & \alpha & \\
\varphi_4 : & \alpha \wedge \beta & \text{aus } \varphi_2, \varphi_3 \text{ mit (MP)}
\end{array}
$$

Aufgabe 2 (Wohlordnungsprinzip und Auswahlaxiom)

Zeigen Sie, dass aus ZF und dem Wohlordnungsprinzip WOP das Auswahlaxiom AC folgt.

Lösung:

Wir nehmen an, dass WOP gilt. Sei $\mathcal{X}$ eine Menge von nichtleeren Mengen. Gemäss WOP gibt es eine Wohlordnung $<$ auf $\bigcup \mathcal{X}$. Wir definieren

$$f : \mathcal{X} \to \bigcup \mathcal{X}, \qquad f(X) := <\text{-minimales Element von } X.$$

Das ist eine Auswahlfunktion für $\mathcal{X}$. Daher gilt AC. Das beweist die Behauptung.

Aufgabe 3 (multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}_{127}^{\times}$)

3.A1 Zeigen Sie, dass die Restklasse $[93] := [93]_{127}$ in $\mathbb{Z}_{127}^{\times}$ liegt.

Lösung:

Die Zahl 127 ist prim, da die Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11$ die Zahl 127 nicht teilen und es keine weitere Primzahl kleiner als $\sqrt{127}$ gibt. Daher sind 93 und 127 teilerfremd. Aus der Definition von $\mathbb{Z}_{127}^{\times}$ folgt daher, dass $[93]$ in $\mathbb{Z}_{127}^{\times}$ liegt.

3.A2 Zeigen Sie, dass das Element $[93]$ von $\mathbb{Z}_{127}^{\times}$ ein Inverses bezüglich der Multiplikation $\cdot_{127}$ besitzt.

Bemerkung: Falls Sie dazu ein Resultat X aus der Vorlesung verwenden, beweisen Sie dann den relevanten Teil von X nochmals. Falls Sie dazu ein weiteres Resultat Y aus der Vorlesung verwenden, brauchen Sie Y nicht zu beweisen.

Lösung:

Da 93 und 127 teilerfremd sind, gibt es gemäss einem Satz aus der Vorlesung (Lemma von Bézout) Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$, sodass $93s + 127t = 1$. Es gilt $[93][s] = [93s] = [1 - 127t] = [1]$. Daher ist $[s]$ ein Inverses zu $[93]$.

Aufgabe 4 (Extensionalitätsaxiom)

Wir betrachten die Signatur $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}} = \{\in\}$. Wir bezeichnen mit ZF_1 das Extensionalitätsaxiom der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre.

4.A1 Was bedeutet die $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$-Formel

$$\varphi :\equiv \forall x \forall y \Big(\forall z (z \notin x) \wedge \forall z (z \notin y) \to x = y \Big)$$

intuitiv?

Lösung:

Diese Formel bedeutet intuitiv, dass die leere Menge eindeutig ist.

4.A2 Zeigen Sie mittels eines semantischen Beweises, dass

$$\mathrm{ZF}_1 \vdash \varphi \tag{1}$$

Lösung:

Sei $(A, \mathbf{M}) \vDash \mathrm{ZF}_1$ ein Modell. Seien $a, b \in A$ so, dass gilt:

Für jedes c in A gilt $c \notin a$ und für jedes c in A gilt $c \notin b$.

Sei c in A. Dann gilt $c \notin a$ und $c \notin b$. Also gilt $c \in a \Leftrightarrow c \in b$. Da $\mathbf{M}$ ein Modell von $\mathrm{ZF}_1 :\equiv \forall x \forall y \Big(\forall z \big(z \in x \leftrightarrow z \in y \big) \to x = y \Big)$ ist, folgt daraus, dass $a \equiv b$. Daraus folgt, dass

$$\mathbf{M} \vDash \forall x \forall y \Big(\forall z (z \notin x) \wedge \forall z (z \notin y) \to x = y \Big) \equiv \varphi.$$

Da $\mathbf{M} \vDash \mathrm{ZF}_1$ beliebig ist, folgt daraus mittels eines Korollars zum Gödelschen Vollständigkeitssatz, dass $\mathrm{ZF}_1 \vdash \varphi$, d. h., (1) gilt.

Aufgabe 5 (Satz von Cantor)

Zeigen das folgende Theorem.

THEOREM 1 *(Satz von Cantor) In* ZF *gilt: Für jede Menge A gibt es keine surjektive Abbildung von A nach ${}^{A}2$.*

Lösung:

Sei A eine Menge und $g : A \to {}^A2$ eine Funktion.

Behauptung 1 *g ist nicht surjektiv.*

Beweis der Behauptung 1: Wir definieren

$$f : A \to 2 = \{0, 1\}, \qquad f(a) := \begin{cases} 1, & \text{falls } g(a)(a) = 0, \\ 0, & \text{falls } g(a)(a) = 1. \end{cases}$$

Sei $a \in A$. Gemäss Definition von f gilt $g(a)(a) \neq f(a)$. Daher gilt $g(a) \neq f$. Da a beliebig ist, folgt daraus, dass f nicht im Bild von g liegt. Daher ist g nicht surjektiv. Das beweist die Behauptung und damit THEOREM 1. $\square$

Aufgabe 6 (Dedekind-Schnitt)

Wir definieren

$$\sqrt{\mathbf{2}} := \Big\{ r \in \mathbb{Q} \,\Big|\, r \geq 0,\, r^2 > 2 \Big\}.$$

Zeigen Sie, dass $\sqrt{\mathbf{2}}$ eine reelle Zahl ist, d. h. ein Dedekind-Schnitt.

Tipp: Um die letzte Bedingung in der Definition eines Dedekind-Schnittes x zu überprüfen, betrachten Sie zu gegebenem $r \in x$ die Zahl $s_0 := \dfrac{2r+2}{r+2}$.

Lösung:

- $\sqrt{\mathbf{2}} \neq \emptyset$: Die Zahl $r := 2$ erfüllt $r \in \mathbb{Q}$, $r \geq 0$ und $r^2 = 4 > 2$. Daher gilt $r \in \sqrt{\mathbf{2}}$. Daraus folgt, dass $\sqrt{\mathbf{2}} \neq \emptyset$.
- $\sqrt{\mathbf{2}} \neq \mathbb{Q}$: Die Zahl $r := 1$ erfüllt $r \in \mathbb{Q}$, $r^2 = 1 \not> 2$ und daher $r \notin \sqrt{\mathbf{2}}$. Daraus folgt, dass $\sqrt{\mathbf{2}} \neq \mathbb{Q}$.
- $\forall r \in x := \sqrt{\mathbf{2}}\, \forall s \in \mathbb{Q} : s > r \to s \in x$: Sei $r \in \sqrt{\mathbf{2}}$ und $s \in \mathbb{Q}$ so, dass $s > r$. Da $r \geq 0$, gilt $s \geq 0$. Des Weiteren gilt $s^2 > r^2 > 2$. Es folgt, dass $s \in \sqrt{\mathbf{2}}$.
- Wir zeigen, dass
$$\forall r \in x := \sqrt{\mathbf{2}}\, \exists s_0 \in x :\ s_0 < r. \tag{2}$$
Sei $r \in \sqrt{\mathbf{2}}$. Wir definieren $s_0 := \frac{2r+2}{r+2}$. Da $r \geq 0$, gilt
$$s_0 \geq 0. \tag{3}$$
Es gilt
$$\begin{aligned} (2r+2)^2 &= 4r^2 + 8r + 4 \\ &> 2\Big(r^2 + 4r + 4\Big) \qquad (\text{da } r^2 > 2) \\ &= 2(r+2)^2 \end{aligned}$$

und daher

$$s_0^2 = \left(\frac{2r+2}{r+2}\right)^2 > 2. \tag{4}$$

Da $r^2 > 2$, gilt $r(r+2) > 2r+2$ und daher

$$r > \frac{2r+2}{r+2} = s_0. \tag{5}$$

Wegen (3,4,5) hat s_0 die gewünschten Eigenschaften, d. h. die Bedingung (2) ist erfüllt. Somit ist $\sqrt{\mathbf{2}}$ ein Dedekind-Schnitt, d. h. eine reelle Zahl.

Aufgabe 7 (Existenz einer Basis eines Vektorraumes)

Zeigen Sie, dass in ZFC jeder Vektorraum[3] eine Basis besitzt.

Hinweise:

- Verwenden Sie ein THEOREM aus der Vorlesung zum Auswahlaxiom.
- Die Inklusionsrelation auf der Potenzmenge einer Menge ist eine Halbordnung.
  Bemerkung: Sie brauchen das hier nicht zu beweisen.
- Sei F ein Körper und V ein F-Vektorraum. Wir definieren
  $$P := \Big\{\text{linear unabhängige Teilmenge von } V\Big\}.$$
- **Behauptung 2** *Jedes $\subseteq$-maximale Element von P ist ein Erzeugendensystem für V.*
  Beweisen Sie diese Behauptung mittels Kontraposition.
  Bemerkung: Sie dürfen Folgendes ohne Beweis verwenden: Sei $S \subseteq V$ linear unabhängig und $v \in V$ ein Vektor, der nicht in der linearen Hülle von S liegt. Dann ist $S \cup \{v\}$ linear unabhängig.

Lösung:

Gemäss einem THEOREM aus der Vorlesung gilt in ZF, dass AC $\to$ KZL. Weil gemäss Voraussetzung AC gilt, folgt daher, dass KZL gilt.
Sei F ein Körper und V ein F-Vektorraum. Wir definieren

$$P := \Big\{\text{linear unabhängige Teilmenge von } V\Big\}.$$

Behauptung 1 *Jedes $\subseteq$-maximale Element von P ist ein Erzeugendensystem für V.*

Beweis der Behauptung 1: Wir zeigen das Kontraponierte. Sei $S \in P$ *kein* Erzeugendensystem für V. Dann gibt es ein $v \in V$, sodass v nicht in der linearen Hülle (=Spann) von S liegt. Die Menge $S \cup \{v\}$ ist linear unabhängig, d. h., sie liegt in P. Daraus folgt, dass S nicht

[3] über jedem Körper

$\subseteq$-maximal ist. Das zeigt das Kontraponierte der Behauptung 1 und damit die Behauptung. □

Wir überprüfen die Bedingungen von KZL. Da $\subseteq_V := \left\{ \langle S, S' \rangle \,\middle|\, S, S' \in \mathcal{P}(A)(S \subseteq S') \right\}$ eine Halbordnung auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(V)$ ist, ist das Paar $(P, \subseteq)$ eine halbgeordnete Menge. Sei C eine $\subseteq$-Kette in P.

Behauptung 2

$$\bigcup C = \bigcup_{S \in C} S \in P, \tag{6}$$

Beweis der Behauptung 2: Seien $k \in \omega$, $a_1, \ldots, a_k \in F$ und $v_1, \ldots, v_k \in \bigcup C$ so, dass $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ gibt es ein $S_i \in C$, sodass $v_i \in S_i$. Da C eine Kette ist, gibt es ein $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$, sodass $S_i \subseteq S_{i_0}$ für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt $v_i \in S_i \subseteq S_{i_0}$. Da $S_{i_0} \in P$, ist S_{i_0} linear unabhängig. Daher gilt $a_1 = \cdots = a_k = 0$.
Daher ist $\bigcup C$ linear unabhängig, d. h. $\bigcup C \in P$. Das beweist Behauptung 2. □

Mittels Behauptung 2 folgt, dass $\bigcup C$ eine obere Schranke für C in P bzgl. $\subseteq$ ist. Daher erfüllt $(P, \subseteq)$ die Bedingungen von KZL.
Gemäss KZL besitzt P daher ein $\subseteq$-maximales Element B. Gemäss Behauptung 1 ist B ein Erzeugendensystem für V. Da $B \in P$, ist es linear unabhängig. Also ist B eine Basis für V, wie gewünscht.

Aufgabe 8 (abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen)

Zeigen Sie, dass in ZFC die Vereinigung jeder abzählbaren Kollektion (= Menge) $\mathcal{A}$ abzählbarer Mengen abzählbar ist.

Hinweise:

- Wir definieren

$$\begin{aligned} X_A &:= \left\{ g \in {}^{\omega}A \,\middle|\, g \text{ ist surjektiv} \right\}, \qquad \text{für } A \in \mathcal{A}, \\ \mathcal{X} &:= \left\{ X_A \,\middle|\, A \in \mathcal{A} \right\}. \end{aligned}$$

  Das sind Mengen.

  Bemerkung: Sie brauchen das nicht zu beweisen.

- Finden Sie eine Funktion

$$G : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{X},$$

  sodass $G(A) \in X_A$, für jedes $A \in \mathcal{A}$.

- Verwenden Sie G und Abzählbarkeit von $\mathcal{A}$, um eine surjektive Funktion

$$H : \omega \times \omega \to \bigcup \mathcal{A}$$

  zu konstruieren.

- Verwenden Sie, dass es in ZF eine surjektive Funktion von ω nach $\omega \times \omega$ gibt.

  Bemerkung: Sie brauchen das nicht zu beweisen.

Lösung:

O. B. d. A. können wir annehmen, dass jedes Element von $\mathcal{A}$ nicht leer ist. Sei $A \in \mathcal{A}$. Gemäss Voraussetzung ist A abzählbar. Da $A \neq \emptyset$, gibt es daher eine surjektive Abbildung $g : \omega \to A$. Daher ist X_A nicht leer. Gemäss dem Auswahlaxiom gibt es daher eine Auswahlfunktion für $\mathcal{X}$, d. h. eine Funktion

$$f : \mathcal{X} \to \bigcup \mathcal{X},$$

sodass $f(X) \in X$, für jedes $X \in \mathcal{X}$. Wir definieren

$$G : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{X}, \qquad G(A) := f(X_A).$$

Für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$G(A) = f(X_A) \in X_A \subseteq \bigcup \mathcal{X}.$$

Daher ist die Funktion G wohldefiniert. Wegen unserer Voraussetzung, dass $\mathcal{A}$ abzählbar ist, gibt es eine surjektive Abbildung

$$h : \omega \to \mathcal{A}.$$

Wir definieren

$$H : \omega \times \omega \to \bigcup \mathcal{A}, \qquad H(m,n) := G(h(m))(n).$$

($G(h(m))$ liegt in $X_{A:=h(m)}$, d. h. $G(h(m)) : \omega \to A$.)

Behauptung 3 *Die Abbildung H ist surjektiv.*

Beweis der Behauptung 3: Sei $a \in \bigcup \mathcal{A}$. Es gibt ein $A \in \mathcal{A}$, sodass $a \in A$. Wir definieren

$$g := f(X_A) \in X_A.$$

Daher ist g eine surjektive Abbildung von ω nach A. Da $a \in A$, gibt es daher ein $n \in \omega$, sodass

$$g(n) = a.$$

Da h surjektiv ist, gibt es ein $m \in \omega$, sodass $h(m) = A$. Es gilt

$$H(m,n) = G\Big(h(m) = A\Big)(n) = f(X_A)(n) = g(n) = a.$$

Daher ist H surjektiv. Das beweist die Behauptung 3. $\square$

Gemäss einem Hinweis gibt es eine Surjektion $\psi : \omega \to \omega \times \omega$. Aus Behauptung 3 folgt, dass die Verknüpfung $H \circ \psi : \omega \to \bigcup \mathcal{A}$ surjektiv ist. Aus dem Auswahlaxiom folgt daher, dass es eine injektive Abbildung von $\bigcup \mathcal{A}$ nach ω gibt. Das bedeutet, dass $\bigcup \mathcal{A}$ abzählbar ist.