

Notizen zur Vorlesung *Grundstrukturen* für
D-MATH, Frühjahrssemester 2025

F. Ziltener

11. März 2025

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	i
0 Übersicht über die Vorlesung	3
1 Prädikatenlogik erster Stufe	7
1.-1 Ausblick	7
1.0 Alphabet, Terme, Formeln, Axiome, Schlussregeln und Beweise	10
1.1 Theorie = Menge der nicht-logischen Axiome	27
1.2 Semi-formale Beweise	34
1.3 Modelle	35
Literaturverzeichnis	43

Vorwort

Im Frühjahrssemester 2025 halte ich an der ETH Zürich die Vorlesung *Grundstrukturen* für Studentinnen und Studenten des Studiengangs Mathematik. Diese Notizen ergänzen die folgende Literatur für dieses Fach:

L. Halbeisen, *Grundstrukturen*, Skript zur Vorlesung 2024, ETH Zürich.

L. Halbeisen, R. Krapf, *Gödel's theorems and Zermelo's axioms—a firm foundation of mathematics*, Birkhäuser/Springer, Cham, 2020.

L. Halbeisen, *Combinatorial set theory, with a gentle introduction to forcing*, second edition, Springer Monogr. Math., Springer, Cham, 2017.

Meine Notizen beruhen hauptsächlich auf dem oben angegebenen Skript von L. Halbeisen. Ich hoffe, dass Ihnen meine Notizen beim Verständnis des Stoffes helfen werden. Rückmeldungen sind willkommen! Bitte schicken Sie diese an fabian.ziltener@math.ethz.ch

Fabian Ziltener, ETH Zürich

Kapitel 0

Übersicht über die Vorlesung

In der Vorlesung *Grundstrukturen* werden wir Themen aus den folgenden Gebieten behandeln:

- (i) Prädikatenlogik erster Stufe
- (ii) Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre
- (iii) diskrete Mathematik (Graphentheorie)
- (iv) elementare Zahlentheorie (verallgemeinerter euklidischer Algorithmus, Modulorechnen)
- (v) ...

Die Teile (i) und (ii) legen die Grundlage für die Mathematik. In Teil (i) werden wir im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe Axiomensysteme und Beweise auf eine formale Weise behandeln. Wir werden auch den Begriff eines Modells kennenlernen. Intuitiv ist ein *Modell* einer Theorie eine Abbildung, die den Zeichen der Theorie eine *Bedeutung* verleiht. Zum Beispiel wird ein Modell der Gruppentheorie durch eine Gruppe gegeben.

In Teil (ii) werden wir das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem der Mengenlehre kennenlernen. Das erste Axiom dieses Systems besagt zum Beispiel, dass die leere Menge existiert. Auf diesem Axiomensystem basiert fast die ganze Mathematik. In diesem Teil werden wir auch die reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen als *Dedekind-Schnitte* konstruieren.

Wir werden in Teil (ii) auch das Auswahlaxiom kennenlernen. Dieses Axiom besagt, dass jedes kartesische Produkt nichtleerer Mengen nicht leer ist. Das bedeutet, dass wir aus jeder der Mengen gleichzeitig ein Element *auswählen* können. Das Auswahlaxiom

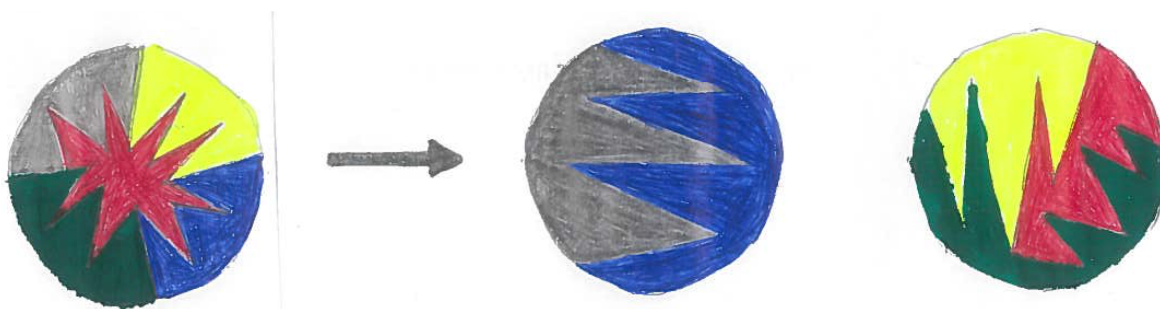


Abbildung 0.1: Beispiel für das Banach-Tarski-Paradox: Eine dreidimensionale Vollkugel kann in fünf Stücke zerlegt werden, die zu zwei Vollkugeln zusammengesetzt werden können, die beide gleich gross wie das Original sind. Die Stücke werden dabei nur gedreht und verschoben. In der Abbildung scheint das nicht der Fall zu sein, aber es ist möglich! (Referenz: [Wag85, Theorem 4.7])

spielt eine zentrale Rolle in der Mathematik. Zum Beispiel kann es verwendet werden, um zu zeigen, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Andererseits ist es auch für das *Banach-Tarski-Paradox* verantwortlich, welches das Folgende besagt:

Satz 0.1 (Banach-Tarski-Paradox). *Seien $n \geq 3$ und $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkte Teilmengen, deren Inneres nicht leer ist (zum Beispiel nicht leere beschränkte offene Teilmengen). Dann kann A in endlich viele disjunkte Stücke aufgespaltet werden, die zu B zusammengesetzt werden können. Dabei werden die Stücke nur gedreht und verschoben.*

Abbildung 0.1 illustriert diesen Satz. Er ist nach Stefan Banach und Alfred Tarski benannt. (Siehe Abbildungen 0.2 und 0.3.) Der Beweis dieses Satzes benutzt das Auswahlaxiom.

Bemerkung. [Paradox] Ein *Paradox* ist eine scheinbar widersprüchliche Situation, die unserer Intuition entgegensteht. Das Wort ist von den altgriechischen Wörtern $\pi\alpha\rho\alpha$ (neben, gegen) und $\delta\acute{o}\xi\acute{\alpha}$ (Schein) abgeleitet. Ein Paradox ist also nicht dasselbe wie ein Widerspruch. Das Banach-Tarski-Paradox zum Beispiel ist ein Theorem, also eine beweisbare mathematische Aussage.

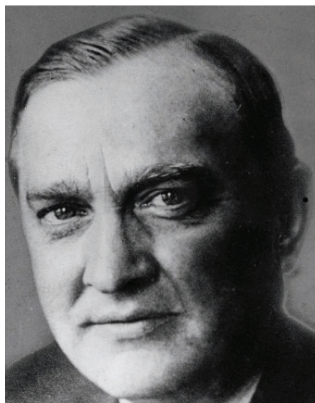


Abbildung 0.2: Stefan Banach, polnischer Mathematiker, 1892-1945.



Abbildung 0.3: Alfred Tarski, polnisch-amerikanischer Mathematiker, 1901-1983.

Kapitel 1

Prädikatenlogik erster Stufe

Dieses Kapitel entspricht [Hal, 0. Terme, Formeln und Formale Beweise, 1. Axiomensysteme und Semi-Formale Beweise, 2. Modelle].

1.-1 Ausblick

In der (mathematischen) *Logik* werden mathematische Argumente untersucht. In Analysis 1 haben Sie *Aussagenlogik* behandelt. Eine *Aussage* ist eine Äusserung, die entweder wahr oder falsch ist. Die Aussagenlogik untersucht Verknüpfungen von Aussagen wie zum Beispiel *A und B* und *wenn A oder B gilt, dann gilt C*, wobei *A, B, C* Aussagen sind.

Prädikatenlogik erweitert die Aussagenlogik durch Prädikate und Funktionen. Ein *Prädikat (erster Stufe)* (oder eine *Satzfunktion* oder *Aussageform*) *P* ist eine Aussage, die von einer oder mehreren (*Individuen-*)*variablen* x, y, \dots abhängt. Jede Variable spielt dabei die Rolle eines betrachteten Gegenstands, zum Beispiel einer Zahl oder Menge. Beispiele für Prädikate sind die folgenden:

$$P(x) :\equiv x + 1 = 0$$

$$\psi(x) :\equiv x \text{ ist die Hauptstadt der Schweiz.}$$

(Das Symbol \equiv bedeutet, dass die beiden Seiten identisch sind. Der Doppelpunkt gibt an, dass wir die linke Seite als die rechte Seite definieren.) Durch Einsetzen von $x = -1$ in *P* erhalten wir die wahre Aussage $P(-1) \equiv -1 + 1 = 0$. Durch Einsetzen von $x :\equiv \text{Zürich}$ erhalten wir die folgende falsche Aussage:

Zürich ist die Hauptstadt der Schweiz.

In der (*Prädikaten-*)*Logik erster Stufe* quantifizieren wir über Individuenvariablen. Um das zu verstehen, fixieren wir ein *Diskursuniversum*, d. h. eine Kollektion aller Ge-

genstände, die wir betrachten werden. Der *Allquantor* ist das Symbol \forall , das wir als *für jedes* (oder *für alle*) lesen. Er bezieht sich auf die Elemente des Diskursuniversums. Der *Existenzquantor* ist das Symbol \exists , das wir als *es gibt* lesen. *Quantifizierung* macht aus einem Prädikat $P(x)$ eine Aussage, indem sie die Variable x mittels eines Quantors *bindet*. Aus $P(x) := x + 1 = 0$ erhalten wir mittels des Existenzquantors zum Beispiel die folgende Aussage:

$$\exists x(x + 1 = 0)$$

Diese Aussage ist falsch, falls unser Diskursuniversum die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen $0, 1, \dots$ ist. *Quantoren* sind *logische Operatoren*. Sie treten in der gesamten Mathematik auf, zum Beispiel in der Analysis in der Definition der Konvergenz einer Folge. Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen eine Zahl A g. d. w. gilt

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \rightarrow |a_n - A| \leq \varepsilon).^1$$

(Mathematische) Logik beschäftigt sich mit dem Begriff eines Beweises. Ein *Beweis* einer Aussage ist eine Herleitung der Aussage aus den *Axiomen*, d. h. Grundannahmen. Ein *Theorem* (oder (mathematischer) *Satz*²) ist eine *beweisbare* Aussage. Mathematik besteht aus Theoremen. Logik bildet daher das Fundament der Mathematik.

Mittels Logik erster Stufe kann die Mengenlehre formalisiert werden. (Wir werden das im Abschnitt über die Axiome der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre tun.) Damit können wir praktisch die gesamte Mathematik formalisieren. Die (*Prädikaten-*)*Logik zweiter Stufe* enthält auch Prädikate Ψ *zweiter Stufe*. Ein solches Prädikat Ψ trifft eine Aussage über ein Prädikat P erster Stufe, zum Beispiel:

$$\Psi(P) := \forall x P(x) \vee \exists x \neg P(x)$$

($\vee :=$ *oder*, $\neg :=$ *nicht*)

In der Logik zweiter Stufe kann neben Individuenvariablen auch über Prädikatvariablen quantifiziert werden. Für obiges Ψ erhalten wir zum Beispiel mittels des Allquantors die folgende wahre Aussage:

$$\forall P \forall x P(x) \vee \exists x \neg P(x)$$

(Es gibt auch die Logik *höherer Stufe*, die Prädikate dritter und höherer Stufen enthält.) Da wir die allermeiste Mathematik mittels Prädikatenlogik *erster* Stufe formalisieren können, werden wir uns in dieser Vorlesung auf diese Logik beschränken.

¹Das Symbol \rightarrow bedeutet Implikation.

²In dieser Vorlesung werden wir das Wort *Satz* abweichend auch für jede Aussage verwenden, die durch eine geschlossene logische Formel gegeben ist.

Logik erster Stufe ist ein *formales System*.³ Ein solches besteht aus einem *Alphabet* von Zeichen, einer Menge *wohlgebildeter (logischer) Formeln (= Zeichenketten)*, einer Menge von *Axiomen* und *Schlussregeln (= logische Ableitungsregeln)*. Im Fall der Logik erster Stufe besteht das Alphabet unter anderem aus Variablen, dem Gleichheitszeichen und Quantoren. Eine Formel ist eine Kette von Zeichen aus dem Alphabet. Intuitiv ist eine Formel wohlgebildet, falls sie "Sinn ergibt". In der Logik erster Stufe sind zum Beispiel die Formeln $x \neq x$ und $\forall x(x = x)$ wohlgebildet, aber die Formel $x =$ nicht.

Die *Axiome* sind wohlgebildete Formeln. Intuitiv spielen sie die Rolle von Grundannahmen, von denen wir ausgehen. Im Fall der Logik erster Stufe teilen sich die Axiome in die *logischen Axiome* und die *Theorie*, d. h. die *nichtlogischen Axiome*. Zum Beispiel ist für jede Variable ν die Formel $\nu = \nu$ ein logisches Axiom. Die *nichtlogischen Axiome* regeln den Gebrauch der nicht-logischen Symbole der Theorie, die wir beschreiben. Für die Gruppentheorie entspricht eines dieser Axiome zum Beispiel der Assoziativität der Gruppenverknüpfung.

Die *Schlussregeln* geben an, wie aus wohlgebildeten Formeln eine neue wohlgebildete Formel abgeleitet werden kann. Im Fall der Logik erster Stufe sind die *geschlossenen Formeln*, die wir aus den Axiomen ableiten können, die *Theoreme* der Theorie. Eine Formel heisst dabei geschlossen, falls in ihr jede Variable an jeder Stelle durch einen Quantor gebunden ist. Ein Beispiel eines Theorems ist $\forall x(x = x)$. (Die Variable x ist hierbei durch den Quantor \forall gebunden.)

Die Logik kann in *Syntax* und *Semantik* aufgeteilt werden. Die *Syntax* ist die Lehre der Beziehungen der Zeichen untereinander. Sie enthält Regeln, nach denen wohlgebildete Formeln gebildet werden und aus gegebenen Formeln eine neue Formel abgeleitet wird. Somit beschreibt sie, was ein Beweis ist. Die Syntax verleiht den Zeichen und wohlgebildeten Formeln *keine* Bedeutung. Sie erfüllt eine rein formale Funktion.

Die *Semantik* ist die Lehre der Interpretation der Zeichen. Im Gegensatz zur Syntax verleiht die Semantik den Zeichen und wohlgebildeten Formeln also intuitiv eine Bedeutung. Ein wichtiges semantisches Konzept ist das eines *Modells*. Es basiert auf dem Begriff einer *Interpretation*, welcher seinerseits auf dem Begriff einer Variablenbelegung basiert. Eine *Variablenbelegung* ordnet jeder Variable einer Theorie ein Objekt in einer festen Menge A zu. Zum Beispiel kann eine solche Belegung der Variable x das Objekt $1 \in A := \mathbb{Z}$ zuordnen. Intuitiv *interpretiert* eine Variablenbelegung also jede Variable als ein Objekt aus A . Eine *Struktur* interpretiert die nicht-logischen Symbole einer Theorie. Zum Beispiel enthält die Gruppentheorie die nicht-logischen Symbole e und \circ , die eine Struktur als *neutrales Element* und *Gruppenverknüpfung* der Gruppe $A = \mathbb{Z}$ interpretieren kann. Eine *Interpretation* ist eine Struktur zusammen mit einer

³Dieses System hängt von der Theorie ab, die wir beschreiben (zum Beispiel Gruppentheorie oder Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre), sowie von Konventionen, die wir treffen. Genau genommen ist Logik erster Stufe daher eine Familie formaler Systeme.



Abbildung 1.1: Kurt Gödel, österreichischer Logiker, 1906–1978.

Variablenbelegung. Ein *Modell* einer Theorie ist schliesslich eine Struktur, in welcher die nichtlogischen Axiome (d. h. die Theorie) für jede Variablenbelegung wahr sind. Zum Beispiel wird ein Modell der Gruppentheorie durch eine Gruppe gegeben.

Die ersten Hauptresultate dieser Vorlesung sind der *Korrektheitssatz* und der *Gödelsche Vollständigkeitssatz*. Diese Sätze stellen einen Zusammenhang zwischen der Syntax und der Semantik für die Logik erster Stufe her. Zusammen besagen sie das Folgende.

Satz 1.1 (Korrektheitssatz, Gödelscher Vollständigkeitssatz). *Ein Satz, d. h. eine geschlossene Formel, kann genau dann in einer Theorie bewiesen werden, falls er in jedem Modell der Theorie wahr ist.*

Die Implikation \Leftarrow dieses Satzes wurde von Kurt Gödel bewiesen. (Siehe Abbildung 1.1.) Der Satz spielt eine grundlegende Rolle in der Mathematik, da wir damit ein Theorem beweisen können, indem wir zeigen, dass das Theorem in jedem Modell der Theorie wahr ist. (So beweisen wir in der Praxis Theoreme.)

1.0 Alphabet, Terme, Formeln, Axiome, Schlussregeln und Beweise

Dieser Abschnitt entspricht [Hal, 0. Terme, Formeln und Formale Beweise]. Wir beschreiben darin die Bestandteile der (Prädikaten-)Logik erster Stufe und ihre Syntax. Die Logik erster Stufe ist aus den folgenden Bestandteilen aufgebaut:

- einem *Alphabet* von Zeichen
- einer Menge von *Termen*

- einer Menge *wohlgebildeter logischer Formeln*
- einer Menge von *Axiomen*
- einer Menge von *Schlussregeln*

Die Terme bilden wir aus Zeichen des Alphabets, nämlich aus Variablen und Konstanten- und Funktionssymbolen. Ein Term spielt die Rolle eines Objektes, das wir durch Anwenden von Funktionen aus Variablen und Konstanten erhalten. Die logischen Formeln bilden wir aus Termen und gewissen Zeichen des Alphabets, nämlich dem Gleichheitszeichen, Relationssymbolen, logischen Verknüpfungen und Quantoren.

Ein *Beweis* ist eine Herleitung einer wohlgebildeten Formel (und insbesondere eines Satzes) aus den Axiomen mittels der Schlussregeln.

Alphabet

Der erste Bestandteil der Logik erster Stufe ist das Alphabet, d. h. ein Vorrat an Symbolen, aus dem wir Terme und Formeln bilden können. Das Alphabet aus den folgenden Symbolen:

logische Symbole:

- (a) **Variablen:** Davon haben wir unendlich viele. Beispiel: x, y, z, v_0, v_1, \dots
- (b) **logische Verknüpfungen**⁴: \neg (nicht), \wedge (und), \vee (oder), \rightarrow (impliziert)⁵
- (c) **Quantoren:** \exists (Existenzquantor), \forall (Allquantor).
- (d) **Gleichheitszeichen** =

Signatur := Menge der nicht-logischen Symbole:

- (e) **Konstantensymbole**
- (f) **Funktionssymbole** Jedes Funktionssymbol besitzt eine *Stelligkeit*. Diese spielt die Rolle der Anzahl Argumente. Zum Beispiel hat das Pluszeichen $+$ die Stelligkeit 2.
- (g) **Relationssymbole** Jedes Relationssymbol besitzt eine *Stelligkeit*. Diese spielt die Rolle der Anzahl Objekte, die zueinander in Beziehung stehen. Ein *zweistelliges* Relationssymbol nennen wir auch *binär*.

⁴In [Hal, Das Alphabet, S. 1] werden diese Symbole *logische Operatoren* genannt.

⁵In dieser Vorlesung verwenden wir das Symbol \rightarrow für die Implikation, nicht \Rightarrow .

Terme

Der zweite Bestandteil der Logik erster Stufe ist eine Menge von Termen. Das sind Wörter (=Zeichenketten), die wir aus den Variablen und Konstanten- und Funktionssymbolen mittels Verkettung nach gewissen Regeln bilden. Ein Term spielt die Rolle eines Objektes, das wir durch Anwenden von Funktionen aus Variablen und Konstanten erhalten. Sei \mathcal{L} eine Signatur, d. h. eine Menge von Konstanten-, Funktions- und Relationssymbolen.

DEFINITION 1.2 (\mathcal{L} -Term). *Ein (\mathcal{L} -)Term ist eine Zeichenkette, die durch endlich viele Anwendungen der folgenden Regeln entstanden ist.*

(T0) (Variable) *Jede Variable in unserem Alphabet ist ein \mathcal{L} -Term.*

(T1) (Konstante) *Jedes Konstantensymbol in \mathcal{L} ist ein \mathcal{L} -Term.*

(T2) (Funktion) *Seien τ_1, \dots, τ_n \mathcal{L} -Terme und F ein n -stelliges Funktionssymbol in \mathcal{L} . Dann ist $F\tau_1 \cdots \tau_n$ ein \mathcal{L} -Term.*

Beispiele. [Term] Seien x, y Variablen in unserem Alphabet und F, G Funktionssymbole in \mathcal{L} mit Stelligkeiten 1, 2. Die folgenden Zeichenketten sind Terme:

- Fx : intuitive Bedeutung: $F(x)$, wobei F eine Funktion ist
- Gxy : Intuitive Bedeutung: $G(x, y)$. Beispiel: Wir nehmen an, dass $+$ ein Funktionssymbol in \mathcal{L} ist. Dann ist $+xy$ ein Term. Intuitive Bedeutung davon: $+(x, y)$, d. h. $x + y$.
- $GFxy$: intuitive Bedeutung: $G(F(x), y)$

Bemerkungen 1.3. [Präfix- und Infixnotation]

- Die Notation Fx heisst *Präfixnotation* oder *polnische Notation*. In dieser Notation schreiben wir einen Operator vor den Operanden⁶, wobei wir keine Klammern verwenden. In unserem Kontext spielt das Funktionssymbol F die Rolle eines Operators und die Variable x die Rolle eines Operanden.
- Der Ausdruck $GFxy$ kann intuitiv nur auf *eine* Art interpretiert werden, nämlich als $G(F(x), y)$. Die Stelligkeit eines Funktionssymbols F bestimmt nämlich, wie viele nachfolgende Symbole F bindet. In unserem Fall bindet F die Variable x und G die beiden Ausdrücke Fx und y , also die Zeichenkette Fxy .

⁶Die Operanden entsprechen den Argumenten einer Funktion.

- In der *Infixnotation* schreiben wir *zweistellige* Operatoren zwischen ihren beiden Operanden. Wenn zum Beispiel $+$ ein Funktionssymbol in \mathcal{L} ist, dann schreiben wir in Infixnotation $x + y$ für den Präfixterm $+xy$. In der Infixnotation schreiben wir Klammern vor, falls eine Formel ohne Klammern mehrdeutig interpretiert werden kann. Seien zum Beispiel x, y Variablen und F, G Funktionssymbole. Der Infix-Term $xFyGz$ ist mehrdeutig, da er sowohl als $(xFy)Gz$ als auch als $xF(yGz)$ gelesen werden kann. Der Term $xFyGz$ ist daher nicht erlaubt. $(xFy)Gz$ und $xF(yGz)$ sind erlaubte Infix-Terme. (Welchen Präfix-Termen entsprechen diese Terme?)

Wohlgebildete Formeln

Der dritte Bestandteil der Logik erster Stufe ist eine Menge wohlgebildeter Formeln. Eine Formel ist eine Zeichenkette, die wir aus Termen, dem Gleichheitszeichen, Relationssymbolen, logischen Verknüpfungen und Quantoren mittels Verkettung bilden. Wir nennen eine Formel *wohlgebildet*, falls sie gemäss den Regeln der nachfolgenden Definition gebildet ist. Eine wohlgebildete Formel spielt die Rolle einer Aussage oder eines Prädikats, d. h. einer Aussage, die von Variablen abhängt. Sei \mathcal{L} eine Signatur.

DEFINITION 1.4 (wohlgebildete \mathcal{L} -Formel). *Eine wohlgebildete (oder wohlgeformte) (\mathcal{L} -)Formel ist eine Zeichenkette, die durch endlich viele Anwendungen der folgenden Regeln entstanden ist.*

(F0) (Gleichheit) Seien τ_1, τ_2 \mathcal{L} -Terme. Dann ist $= \tau_1 \tau_2$ eine \mathcal{L} -Formel.

(F1) (Relation) Seien τ_1, \dots, τ_n \mathcal{L} -Terme und R ein n -stelliges Relationssymbol in \mathcal{L} . Dann ist $R\tau_1 \cdots \tau_n$ eine \mathcal{L} -Formel.

(F2) (nicht) Sei φ eine \mathcal{L} -Formel. Dann ist $\neg\varphi$ eine \mathcal{L} -Formel.

(F3) (und, oder, Implikation) Seien φ, ψ \mathcal{L} -Formeln. Dann sind $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, $\rightarrow\varphi\psi$ ebenfalls \mathcal{L} -Formeln.

(F4) (Quantor) Sei φ eine \mathcal{L} -Formel und ν eine Variable (aus unserem Alphabet).⁷ Dann sind $\exists\nu\varphi$ und $\forall\nu\varphi$ ebenfalls \mathcal{L} -Formeln.

Beispiele. [wohlgebildete Formeln] Wir nehmen an, dass \in ein Relationssymbol in \mathcal{L} ist.

⁷ ν ist also gegeben durch x oder y oder $v_0 \dots$. Das Symbol ν ist keine Variable in unserem Alphabet.

- Die folgenden linken Zeichenketten sind wohlgebildete Formeln. Rechts neben jeder Formel ist ihre intuitive Bedeutung angegeben:

$= xx$	x ist gleich x .
$\in xy$	x ist Element von y .
$\neg = xx$	x ist nicht gleich x .
$\vee = xy\neg = xy$	x ist gleich y oder x ist nicht gleich y .
$\exists x \in xy$	Es gibt ein x , das Element von y ist.
$\forall x = xy$	Jedes x ist gleich y .

- Seien F, G Funktionssymbole (in \mathcal{L}) der Stelligkeiten 1, 2. Die folgenden linken Zeichenketten sind wohlgebildete Formeln. Rechts neben jeder Formel ist ihre intuitive Bedeutung angegeben:

$= Fxy$	$F(x)$ ist gleich y .
$\exists y = Fxy$	Es gibt ein y so, dass $F(x)$ gleich y ist.
$\forall x \exists y = Fxy$	Für jedes x gibt es ein y so, dass $F(x)$ gleich y ist.
$\wedge = zGxy\neg = xy$	z ist gleich $G(x, y)$ und x ist nicht gleich y .

- Die folgenden Zeichenketten sind *keine* wohlgebildeten Formeln:

$$= x \quad \in x \quad \vee = xy \quad \wedge xy$$

Intuitiv bedeutet das, dass diese Zeichenketten keinen Sinn ergeben. Zum Beispiel bedeutet $= x$ intuitiv, dass x gleich ist. Das ist sinnlos, da nicht gesagt wird, wozu x gleich ist. Die Zeichenkette $\wedge xy$ ergibt intuitiv keinen Sinn, da die Individuenvariablen x und y nicht für Aussagen oder Prädikate stehen, sondern für Objekte.

Die nächsten Bemerkungen sind analog zu den Bemerkungen 1.3.

Bemerkungen. [Präfix- und Infixnotation]

- Die gemäss Definition 1.4 wohlgebildeten Formeln sind in Präfixnotation. In dieser Notation schreiben wir einen Operator vor den Operanden, wobei wir keine Klammern verwenden. Wir schreiben also zum Beispiel wie in $(F0) = \tau_1 \tau_2$. Das Gleichheitszeichen ist hierbei ein Operator. Die Terme τ_1, τ_2 sind Operanden.

- In der *Infixnotation* schreiben wir *zweistellige* Operatoren zwischen ihren beiden Operanden. Zum Beispiel schreiben wir also $\tau_1 = \tau_2$ für $= \tau_1 \tau_2$ und $\varphi \wedge \psi$ für $\wedge \varphi \psi$. In dieser Notation verwenden wir Klammern, falls eine Formel ohne Klammern mehrdeutig interpretiert werden kann. Seien zum Beispiel φ, ψ, χ wohlgebildete Formeln. Die Infix-Formel $\varphi \wedge \psi \vee \chi$ ist *nicht* wohlgebildet, da sie mehrdeutig interpretiert werden kann. Die Infix-Formeln $(\varphi \wedge \psi) \vee \chi$ und $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ sind dagegen wohlgebildet.
- Weitere Beispiele: Die Präfixformel $\rightarrow \rightarrow \varphi \psi \varphi$ hat die Infixform $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$. Die Präfixformel $\vee = xy \neg = xy$ hat die Infixform $x = y \vee \neg x = y$. Wir verwenden hierbei die Infixnotation sowohl für Funktionssymbole als auch logische Verknüpfungen.
- Um Formeln lesbarer zu machen, verwenden wir ab jetzt meistens die Infixnotation für Formeln.
- Zum beschriebenen Alphabet fügen wir also noch Klammersymbole $()$ hinzu, falls wir die Infixnotation verwenden.

Die wir nur wohlgebildete Formeln betrachten werden, lassen wir von jetzt an den Zusatz *wohlgebildet* in der Regel weg. Mit *Formel* meinen wir von jetzt an also *wohlgebildete Formel*.

Um den Bereich eines Quantors zu definieren, benötigen wir die folgende Bemerkung. Sei φ eine (wohlgebildete) Formel (wie in Definition 1.4), die einen Ausdruck der Form $\exists \nu$ enthält, wobei \exists für \exists oder \forall steht und ν eine Variable ist.

Bemerkung 1.5. [Teilformel] Wir schreiben i_- für die Stelle in der Zeichenkette φ , die unmittelbar nach $\exists \nu$ kommt. Es gibt eine eindeutige Stelle $i_+ \geq i_-$ in φ , sodass ψ eine Formel ist, wobei ψ die Teilzeichenkette von φ ist, die bei i_- beginnt und bei i_+ endet. Das folgt mit Hilfe von Induktion.

DEFINITION 1.6 (Bereich eines Quantors, Gebundenheit und Freiheit einer Variable). (i)

Der Bereich (oder die Reichweite) des Quantors $\exists \nu$ ⁸ ist die eindeutige Formel, die unmittelbar auf $\exists \nu$ folgt, d. h. die Formel ψ wie in Bemerkung 1.5.

(ii) Eine Variable ν kommt an einer Stelle in einer Formel φ gebunden vor g. d. w.⁹ sie dort im Bereich eines Quantors der Form $\exists \nu$ liegt (mit gleichem ν). Der Quantor mit dem kleinsten Bereich, worin ν an dieser Stelle vorkommt, bindet

⁸Wir verwenden hier das Wort *Quantor* leicht missbräuchlich für die Zeichenkette $\exists \nu$ statt nur für \exists .

⁹genau dann, wenn

ν an dieser Stelle. Falls eine Variable an einer Stelle nicht gebunden vorkommt, dann sagen wir, dass sie dort frei vorkommt. Für jede Formel φ definieren wir

$$\text{frei}(\varphi) := \{ \text{Variable, die in } \varphi \text{ (an mindestens einer Stelle) frei vorkommt} \}.$$

Beispiele 1.7. [gebundenes und freies Vorkommen einer Variable] Sei R ein zweistelliges Relationssymbol (in der Signatur \mathcal{L}). In die folgenden Formeln kommen die Variablen genau an den Stellen gebunden vor, an denen sie fettgedruckt sind.

(i) Beispiele in Präfixnotation (Definition 1.4):

$$\exists x = \mathbf{xy} \quad \exists y = x\mathbf{y} \quad \wedge \forall x = \mathbf{xy}R\mathbf{xy}$$

Die Teilformel wie in Bemerkung 1.5 ist dabei in allen drei Fällen durch $\psi \equiv xy$ gegeben. Es gilt

$$\text{frei}(\exists x = \mathbf{xy}) = \{y\}, \quad \text{frei}(\exists y = x\mathbf{y}) = \{x\}, \quad \text{frei}(\wedge \forall x = \mathbf{xy}R\mathbf{xy}) = \{x, y\}.$$

(ii) dieselben Beispiele in Infixnotation:

$$\exists x(\mathbf{x} = y) \quad \exists y(x = \mathbf{y}) \quad (\forall x(\mathbf{x} = y)) \wedge xRy$$

(iii) Wir betrachten das folgende Beispiel in Präfixnotation:

$$\varphi := \exists x \wedge \forall x = \mathbf{xy}R\mathbf{xy}$$

Der Bereich des Quantors $\forall x$ ist $\psi \equiv xy$. Das folgt aus dem letzten Beispiel in (i). Der Bereich des Quantors $\exists x$ ist $\chi \equiv \wedge \forall x = \mathbf{xy}R\mathbf{xy}$. Der Bereich von ψ ist strikt kleiner als ¹⁰ der von χ . Gemäss Definition 1.6(ii) bindet daher der Quantor $\forall x$ die Variable x an der ersten fettgedruckten Stelle. Der Quantor $\exists x$ bindet x an der zweiten fettgedruckten Stelle.

Bemerkung. Im Beispiel (iii) kommt der Quantor $\forall x$ im Bereich des Quantors $\exists x$ vor. Das ist gemäss Definition 1.4 erlaubt. Die Formeln φ wie in Beispiel 1.7(iii) und

$$\varphi' := \exists x \wedge \forall z = zyRxy$$

sind logisch äquivalent. (Siehe DEFINITION 1.16 unten.) In der Praxis können wir daher mit φ' statt mit φ arbeiten. In φ' kommt jede an einer Stelle gebundene Variable dort im Bereich genau eines Quantors vor.

DEFINITION 1.8 (Satz). *Ein Satz ist Formel, in der alle Variablen überall gebunden vorkommen.*

¹⁰d. h. strikt enthalten in

Beispiele. [Satz] Seien P ein einstelliges Relationssymbol und R ein zweistelliges Relationssymbol.

- Die folgenden Formeln in Präfixform sind Sätze:

$$\forall x Px \quad \exists x \neg Rxx \quad \forall \forall x Px \exists y Ryy \quad \forall x \exists y = xy$$

- Die folgenden Formeln in Präfixform sind *keine* Sätze:

$$Px \quad \forall \forall x Px Rxx \quad \exists y = xy$$

Bemerkung. [Satz] Von Definition 1.8 abweichend bedeutet der Terminus *Satz* außerhalb der Logik *Theorem*, d. h. *beweisbare Aussage*. Aus dem Zusammenhang wird jeweils klar sein, welcher Begriff gemeint ist.

Bemerkung. [freie Variablen] Seien φ eine Formel und ν_1, \dots, ν_n Variablen. Wir schreiben

$$\varphi(\nu_1, \dots, \nu_n), \tag{1.1}$$

falls die Variablen ν_1, \dots, ν_n frei in φ vorkommen. Sei zum Beispiel R ein dreistelliges Relationssymbol und $\varphi := \exists x Rxyz$. Wir schreiben $\varphi(y)$, $\varphi(z)$ und $\varphi(y, z)$.

DEFINITION 1.9 (Substitution, Zulässigkeit). *Sei φ eine Formel, ν eine Variable und τ ein Term.*

(i) *Wir definieren*

$$\varphi(\tau) := \varphi(\nu/\tau)$$

als die Formel, die wir erhalten, indem wir an jeder Stelle, an der ν in φ frei vorkommt, die Variable ν durch τ ersetzen.

(ii) *Substitution ist der Prozess, durch welchen wir aus φ die Formel $\varphi(\nu/\tau)$ erhalten.*

(iii) *Die Substitution heisst zulässig g. d. w. dadurch keine Variable in τ gebunden wird. Das bedeutet, dass keine Stelle in φ , an der ν frei vorkommt, im Bereich eines Quantors liegt, der eine Variable in τ bindet.*

Bemerkung. [Substitution] Wir verwenden die Notation $\varphi(\tau)$ nur dann, falls aus dem Kontext klar ist, welche Variable ν ersetzt wurde.

Beispiele. [Substitution, Zulässigkeit] Wir verwenden die Infixnotation. Seien c ein Konstantensymbol und F, G Funktionssymbole der Stelligkeiten 1, 2. Die folgende Tabelle beschreibt einige Substitutionen und gibt ihre Zulässigkeit an:

φ	ν	τ	$\varphi(\nu/\tau)$	zulässig
$x = y$	x	c	$c = y$	ja
$x = y$	x	y	$y = y$	ja
$x = y$	x	Fx	$Fx = y$	ja
$x = x \wedge \forall x(x = x)$	x	c	$c = c \wedge \forall x(x = x)$	ja
$\forall y(x = y)$	x	y	$\forall y(y = y)$	nein
$\forall y(x = y)$	x	Gyz	$\forall y(Gyz = y)$	nein

Axiome

Der vierte Bestandteil der Logik erster Stufe ist eine Menge von *Axiomen*. Das sind wohlgebildete Formeln, die wir als Ausgangspunkt für Beweise verwenden. Intuitiv spielen die Axiome die Rolle von Grundannahmen, von denen wir ausgehen. Im Fall der Logik erster Stufe teilen sich die Axiome auf in die *logischen Axiome* und die *Theorie*, d. h. die *nichtlogischen Axiome*.

Bemerkung. [Etymologie] Das Wort *Axiom* ist vom altgriechischen Wort $\acute{\alpha}\xi\iota\omicron\varsigma$, *würdig*, *wert* abgeleitet. Die Idee ist, dass eine Axiom eine Aussage ist, die es wert ist, als richtig angenommen zu werden.

Die logischen Axiome

Die logischen Axiome regeln den Gebrauch der logischen Verknüpfungen, Quantoren und des Gleichheitszeichen. Diese Axiome haben wir immer, unabhängig von der Theorie, die wir beschreiben.

Seien \mathcal{L} eine Signatur und $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi$ \mathcal{L} -Formeln.

Axiome für die Verknüpfungen¹¹:

Axiomenschema	Bezeichnung
$L_0 : \varphi \vee \neg\varphi$	tertium non datur
$L_1 : \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	verum sequitur ex quodlibet
$L_2 : (\psi \rightarrow (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)) \rightarrow ((\psi \rightarrow \varphi_1) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi_2))$	
$L_3 : (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$	
$L_4 : (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$	
$L_5 : \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\psi \wedge \varphi))$	
$L_6 : \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$	
$L_7 : \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$	
$L_8 : (\varphi_1 \rightarrow \varphi_3) \rightarrow ((\varphi_2 \rightarrow \varphi_3) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \rightarrow \varphi_3))$	
$L_9 : \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	ex falso (sequitur) quodlibet

¹¹in Infixnotation

Bemerkungen. • Jedes L_i , $i \in \{0, \dots, 9\}$, ist ein *Axiomenschema*, d. h. eine Konstruktionsvorschrift für Axiome. L_i liefert ein Axiom für jede Wahl der Formeln aus φ, \dots, ψ , die in L_i vorkommen. Zum Beispiel erhalten wir mittels L_0 für $\varphi \equiv x = x$ das Axiom $(x = x) \vee \neg(x = x)$. Mittels L_1 erhalten wir für $\varphi \equiv x = y$ und $\psi \equiv \exists z(z = z)$ das Axiom

$$x = y \rightarrow (\exists z(z = z) \rightarrow x = y)$$

Der Einfachheit halber werden wir die Axiomenschemata L_0, \dots, L_9 meistens kurz *Axiome* nennen.

- Intuitiv spielt jede der Formeln φ, \dots, ψ die Rolle eines Prädikats, d. h. einer Aussage, die möglicherweise von Variablen abhängt. Wir betrachten den Fall, dass jede dieser Formeln ein Satz ist (d. h., jede Variable ist gebunden). Dann spielt jede Formel die Rolle einer Aussage. Sei $i \in \{0, \dots, 9\}$. Das Axiom L_i spielt die Rolle einer verknüpften Aussage. Intuitiv besitzt es daher einen Wahrheitswert¹², der mittels Wahrheitstabellen durch die Wahrheitswerte der “Aussagen” φ, \dots, ψ bestimmt wird. Durch Nachprüfen können wir sehen, dass der “Wahrheitswert von L_i ” *wahr* ist, für alle Kombinationen von Wahrheitswerten für φ, \dots, ψ . Die Axiome L_0, \dots, L_9 sind daher sinnvoll.
- Die letzte Bemerkung liefert eine Motivation für die Axiome L_0, \dots, L_9 . Formeln (also insbesondere die Axiome) besitzen jedoch *keine* Wahrheitswerte. Erst mittels einer *Interpretation* werden wir ihnen später im Rahmen der *Modelltheorie* Wahrheitswerte verleihen.
- Das Axiom L_0 , *tertium non datur*, *ein Drittes ist nicht gegeben* wird auf deutsch mit *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* bezeichnet. Intuitiv besagt dieses Axiom, dass für jede Aussage die Aussage oder ihr Gegenteil wahr ist. D. h., es gibt keine dritte Möglichkeit.
- Das Axiom L_1 , *verum sequitur ex quodlibet*, *Wahres folgt aus Beliebigen* besagt intuitiv, dass unter der Annahme, dass eine Aussage wahr ist, die Aussage aus jeder beliebigen Aussage folgt.
- Das Axiom L_9 , *ex falso (sequitur) quodlibet*, *aus Falschem folgt Beliebigen*, besagt intuitiv, dass aus der falschen Aussage *nicht* φ und φ jede beliebige Aussage ψ folgt.¹³

¹²*wahr* oder *falsch*

¹³Der Name *ex falso (sequitur) quodlibet* wird auch für das folgende Theorem verwendet: Für alle Formeln φ und ψ gilt: Falls $\varphi \wedge \neg\varphi$ beweisbar ist, dann ist ψ beweisbar. Siehe [HK20, Proposition 2.6, p. 25].

Axiome für die Quantoren: Seien τ ein \mathcal{L} -Term und ν ein Variable so, dass die Substitution $\varphi(\nu/\tau)$ zulässig ist.

Axiomenschema	Bezeichnung
$L_{10} : \forall \nu \varphi \rightarrow \varphi(\nu/\tau)$	universal instantiation
$L_{11} : \varphi(\nu/\tau) \rightarrow \exists \nu \varphi$	existential generalization

Bemerkungen. • Axiom L_{10} , *universal instantiation*, besagt intuitiv das Folgende: Falls alle Objekte die Eigenschaft φ haben, dann hat jedes bestimmte Objekt τ die Eigenschaft φ . Beispiel: Falls alle Menschen sterblich sind, dann ist der Mensch Sokrates sterblich.

- Axiom L_{11} , *existential generalization*, besagt intuitiv das Folgende: Falls das bestimmte Objekt τ die Eigenschaft φ hat, dann existiert ein Objekt mit der Eigenschaft φ . Beispiel: Falls der Mensch Sokrates sterblich ist, dann existiert ein sterblicher Mensch.

Sei ν eine Variable, die in ψ nicht frei vorkommt.

Axiomenschema
$L_{12} : \forall \nu (\psi \rightarrow \varphi(\nu)) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall \nu \varphi(\nu))$
$L_{13} : \forall \nu (\varphi(\nu) \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists \nu \varphi(\nu) \rightarrow \psi)$

Axiome für das Gleichheitszeichen: Seien $\tau, \tau_1, \dots, \tau_n, \tau'_1, \dots, \tau'_n$ \mathcal{L} -Terme, $R \in \mathcal{L}$ ein n -stelliges Relationssymbol und $F \in \mathcal{L}$ ein n -stelliges Funktionssymbol.

Axiomenschema
$L_{14} : \tau = \tau$
$L_{15} : (\tau_1 = \tau'_1 \wedge \dots \wedge \tau_n = \tau'_n) \rightarrow (R(\tau_1, \dots, \tau_n) \rightarrow R(\tau'_1, \dots, \tau'_n))$
$L_{16} : (\tau_1 = \tau'_1 \wedge \dots \wedge \tau_n = \tau'_n) \rightarrow (F(\tau_1, \dots, \tau_n) = F(\tau'_1, \dots, \tau'_n))$

Bemerkungen. • Aus L_{14} folgt, dass das Gleichheitszeichen reflexiv ist, d. h. $\forall x(x = x)$ gilt. (Siehe später.)

- In L_{15} lassen wir auch R gegeben durch das Gleichheitszeichen $=$ zu. Wir werden das verwenden, um zu beweisen, dass Gleichheit symmetrisch ist. (Siehe Beispiel 1.15.)

Theorie = Menge der nicht-logischen Axiome

Eine *Theorie* T im technischen Sinn ist eine Menge von Formeln, die wir *nichtlogische Axiome* nennen und zu den logischen Axiomen als Ausgangspunkt für Beweise hinzunehmen. Die Theorie T regelt den Gebrauch der nicht-logischen Symbole der Theorie

(im naiven Sinn), die wir beschreiben. Für die Gruppentheorie entspricht eines dieser Axiome zum Beispiel der Assoziativität der Gruppenverknüpfung. Im Abschnitt 1.1 werden wir Beispiele von Theorien kennenlernen.

Schlussregeln und (formale) Beweise

Der letzte Bestandteil der Logik erster Stufe wird durch die beiden *Schlussregeln Modus Ponens* und *Verallgemeinerung* gegeben. Ein *Beweis* ist eine Herleitung einer Formel aus den Axiomen mittels dieser beiden Regeln.

Schlussregeln:

Modus Ponens (MP): Diese Schlussregel ist durch das folgende Schema gegeben, wobei φ und ψ beliebige Formeln sind:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad (\text{Prämisse} = \text{Annahme})}{\varphi} \quad (\text{Prämisse})$$

$$\frac{\varphi}{\psi} \quad (\text{Konklusion})$$

Das bedeutet, dass wir aus den Prämissen $\varphi \rightarrow \psi$ und φ auf die Konklusion ψ schließen. In einem formalen Beweis können wir den Modus Ponens anwenden, falls wir $\varphi \rightarrow \psi$ und φ schon hergeleitet haben. Wir wenden den Modus Ponens an, indem wir die Konklusion als neue Zeile hinzufügen.

Beispiel. [modus ponens] Wir nehmen an, dass \mathcal{L} die Konstante c enthält.

$$\frac{c = c \rightarrow \exists x(x = x) \quad c = c}{\exists x(x = x)}$$

Bemerkungen. • Ein anschauliches Beispiel, in dem wir den Modus Ponens anwenden, ist das folgende:

$$\frac{\text{Wenn es geregnet hat, ist die Strasse nass.} \quad \text{Es hat geregnet.}}{\text{Die Strasse ist nass.}}$$

- Um Zeilen zu sparen, schreiben wir den Modus ponens auch wie folgt: $\frac{\varphi \rightarrow \psi, \varphi}{\psi}$

Verallgemeinerung (\forall): $\frac{\varphi}{\forall \nu \varphi}$ (Konklusion) (Prämisse)

Dabei ist φ eine beliebige Formel und ν eine beliebige Variable.

Seien \mathcal{L} eine Signatur¹⁴, Φ eine Menge von \mathcal{L} -Formeln und ψ eine \mathcal{L} -Formel.

¹⁴d. h. eine Menge von nicht-logischen Symbolen

DEFINITION 1.10 (formaler Beweis, Beweisbarkeit). (i) Ein (formaler) Beweis von ψ aus Φ ist eine endliche Folge der Form $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ so, dass $\varphi_n \equiv \psi$ ¹⁵ und für jedes $i \in \{0, \dots, n\}$ (mindestens) eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a) φ_i ist eine Instanz eines logischen Axiomenschemas.
- (b) φ_i ist eine Formel in Φ .
- (c) Es gibt $j, k < i$, sodass $\varphi_j \equiv \varphi_k \rightarrow \varphi_i$.
- (d) Es gibt ein $j < i$ und eine Variable ν , die in keiner Formel von Φ frei vorkommt, sodass $\varphi_i \equiv \forall \nu \varphi_j$.

(ii) Die Formel ψ heisst aus Φ (oder in Φ) beweisbar (oder herleitbar) g. d. w. es einen Beweis von ψ aus Φ gibt. In diesem Fall schreiben wir:

$$\Phi \vdash \psi$$

Andernfalls schreiben wir:

$$\Phi \not\vdash \psi$$

Im Fall $\Phi = \emptyset$ (leere Menge), kürzen wir $\emptyset \vdash \psi$ ab zu:

$$\vdash \psi$$

Für jede Formel φ schreiben wir auch

$$\varphi \vdash \psi$$

für $\{\varphi\} \vdash \psi$.

Bemerkungen. [formaler Beweis]

- Mit einer *Instanz* eines logischen Axiomenschemas meinen wir eine Formel, die wir dadurch erhalten, dass wir im Axiomenschema konkrete Formeln einsetzen. Zum Beispiel ist eine Instanz von $L_0 : \varphi \vee \neg\varphi$ durch $x = x \vee \neg(x = x)$ gegeben.
- Die Bedingung (ic) besagt, dass wir φ_i mittels des Modus Ponens wie folgt erhalten:

$$\frac{\varphi_k \rightarrow \varphi_i \quad \varphi_k}{\varphi_i}$$

- Die Bedingung (id) besagt, dass wir φ_i mittels Verallgemeinerung aus φ_j erhalten.

¹⁵D. h., φ_n und ψ sind identische Zeichenketten.

- Statt die Formeln $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ durch Kommas zu trennen, schreiben wir sie oft auf verschiedene Zeilen. Wir schreiben einen Beweis also in der Form:

$$\begin{array}{l} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{array}$$

Beispiel 1.11. [Beweis] Wir zeigen:

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

$\varphi_0 : (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$	Instanziierung von L ₂
$\varphi_1 : \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$	Instanziierung von L ₁
$\varphi_2 : (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$	aus φ_0 und φ_1 mit (MP), Definition 1.10(ic)
$\varphi_3 : \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$	Instanziierung von L ₁
$\varphi_4 : \varphi \rightarrow \varphi$	aus φ_2 und φ_3 mit (MP)

Bemerkungen 1.12. [Beweisbarkeit, Metamathematik]

- Beweisbarkeit \vdash ist eine *metamathematische* Bedingung, nämlich eine Bedingung an eine Formel in unserem formalen System (Logik erster Stufe). Diese Bedingung ist *ausserhalb* unseres formalen Systems formuliert. Allgemein ist *Metamathematik* das Studium der Mathematik mittels mathematischer Methoden. Um Metamathematik zu betreiben, verwenden wir eine *Metasprache*. In dieser Vorlesung ist das die natürliche Sprache (deutsch) zusammen mit einigen abkürzenden Symbolen wie zum Beispiel:

\equiv	(identisch, gleiche Zeichenfolge)
\vdash	(beweist)
\Rightarrow	(impliziert = wenn ... dann)
\Leftarrow	(folgt aus)
\Leftrightarrow	(genau dann, wenn)

(Die letzten drei Symbole sind fettgedruckt.) Zum Beispiel sind ψ *ist aus* Φ *beweisbar* und $\Phi \vdash \psi$ Ausdrücke in der Metasprache.

- Zur Unterscheidung von der Metasprache nennen wir die Sprache, die wir beschreiben, die *Objektsprache*. In unserem Fall ist das die Sprache der Logik erster Stufe. Zum Beispiel ist $\psi \rightarrow \varphi$ ein Ausdruck in der Objektsprache.
- Indem wir “DEFINITION” mit Grossbuchstaben schreiben, geben wir an, dass es sich um eine *metamathematische* Definition handelt.

Das DEDUKTIONSTHEOREM

Das DEDUKTIONSTHEOREM besagt, dass eine Implikation genau dann aus einer Formelmengemenge herleitbar ist, falls ihr zweiter Teil aus ihrem ersten Teil und der Formelmengemenge herleitbar ist:

THEOREM 1.13 (DEDUKTIONSTHEOREM (DT)). *Sei Φ eine Menge von (\mathcal{L} -)Formeln und ψ eine Formel. Es gilt $\Phi \vdash \psi \rightarrow \varphi$ genau dann, falls $\Phi + \psi \vdash \varphi$.*

Hierbei bezeichnet $\Phi + \psi$ die Vereinigung der Menge Φ mit $\{\psi\}$.

Beweis: [Hal, DEDUKTIONSTHEOREM (DT), S. 4]

Die ersten drei folgenden Bemerkungen sind analog zu Bemerkungen 1.12.

Bemerkungen. • Das DEDUKTIONSTHEOREM ist ein metamathematisches Theorem, d. h. ein Theorem *über* ein formales System (nämlich die Logik erster Stufe). Das DEDUKTIONSTHEOREM ist in der Metasprache formuliert.

- Indem wir “DEDUKTIONSTHEOREM” mit Grossbuchstaben schreiben, geben wir an, dass es sich um ein metamathematisches Theorem handelt.
- Die Implikation \Rightarrow des DEDUKTIONSTHEOREM folgt direkt aus dem Modus Ponens. (Siehe Bedingung (ic) in Definition 1.10.)
- Die Implikation \Leftarrow des DEDUKTIONSTHEOREM erlaubt es uns, eine Implikation $\varphi \rightarrow \psi$ auf die folgende gewohnte Weise zu beweisen:

Wir nehmen an, dass φ gilt. ... Daraus folgt ψ . Das beweist die Implikation $\varphi \rightarrow \psi$.

Als eine Anwendung des DEDUKTIONSTHEOREMS zeigen wir, dass das Gleichheitszeichen eine Äquivalenzrelation ist.

DEFINITION 1.14 (Äquivalenzrelation). *Wir nennen ein zweistelliges Relationssymbol R in \mathcal{L} eine Äquivalenzrelation g. d. w. die folgenden Bedingungen erfüllt:*

$$\begin{array}{ll} \forall x(xRx) & \text{Reflexivität} \\ \forall x\forall y(xRy \rightarrow yRx) & \text{Symmetrie} \\ \forall x\forall y\forall z\left((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz\right) & \text{Transitivität} \end{array}$$

Beispiel 1.15. [Anwendung des DEDUKTIONSTHEOREMS] Behauptung: “=” ist eine Äquivalenzrelation. Beweis:

“=” ist reflexiv:

$\varphi_0 : x = x$ Instanziierung von L_{14}
 $\varphi_1 : \forall x(x = x)$ aus φ_0 mit Verallgemeinerung (\forall), Definition 1.10(id)

“=” ist symmetrisch:

Wir definieren $\varphi := x = y$. Wir zeigen, dass $\varphi \vdash y = x$:

$\varphi_0 : (x = y \wedge x = x) \rightarrow (x = x \rightarrow y = x)$ Instanziierung von L_{15}
 $\varphi_1 : x = x$ Instanziierung von L_{14}
 $\varphi_2 : x = y$ $\varphi_2 \equiv \varphi$
 $\varphi_3 : x = x \rightarrow (x = y \rightarrow (x = y \wedge x = x))$ Instanziierung von L_5
 $\varphi_4 : x = y \rightarrow (x = y \wedge x = x)$ aus φ_3, φ_1 mit (MP)
 $\varphi_5 : x = y \wedge x = x$ aus φ_4, φ_2 mit (MP)
 $\varphi_6 : x = x \rightarrow y = x$ aus φ_0, φ_5 mit (MP)
 $\varphi_7 : y = x$ aus φ_6, φ_1 mit (MP)

Wir haben also gezeigt, dass $\varphi \vdash y = x$, d. h. $x = y \vdash y = x$, wie gewünscht. Mittels des DEDUKTIONSTHEOREM 1.13 folgt, dass

$$\vdash x = y \rightarrow y = x.$$

Mittels Verallgemeinerung folgt, dass

$$\vdash \forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

Also ist “=” symmetrisch.

Dass “=” transitiv ist, folgt auf eine ähnliche Weise mittels des DEDUKTIONSTHEOREMS. Siehe Übungsserie 2. Das zeigt die Behauptung, dass “=” eine Äquivalenzrelation ist.

Logische Äquivalenz

Seien φ, ψ \mathcal{L} -Formeln. Wir schreiben abkürzend

$$\varphi \leftrightarrow \psi$$

für $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$. Das bedeutet, dass wir in jeder Formel jede Teilformel der Form $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ durch $\varphi \leftrightarrow \psi$ ersetzen dürfen und umgekehrt.

DEFINITION 1.16. *Wir sagen, dass φ und ψ logisch äquivalent sind g. d. w.*

$$\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \quad \text{d. h.} \quad \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

In diesem Fall schreiben wir:

$$\varphi \Leftrightarrow \psi$$

Bemerkungen 1.17. [Beweisbarkeit einer Konjunktion, ¹⁶ logische Äquivalenz]

- (i) Dass φ und ψ logisch äquivalent sind, bedeutet, dass diese Formeln von einem logischen Standpunkt aus dasselbe sagen.
- (ii) Für alle \mathcal{L} -Formeln α, β gilt

$$\vdash \alpha \wedge \beta \quad \Leftrightarrow \quad \vdash \alpha \text{ und } \vdash \beta$$

(\Leftrightarrow = metamathematisches *genau dann, wenn*) Die Implikation \Rightarrow folgt mittels L_3, L_4 und (MP). Die Implikation \Leftarrow folgt mittels L_5 und zweimaliger Anwendung des (MP). (Siehe Übungsserie 2.)

- (iii) Aus Bemerkung (ii) folgt, dass

$$\varphi \Leftrightarrow \psi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ und } \vdash \psi \rightarrow \varphi$$

Beispiel 1.18. [logische Äquivalenz ist reflexiv] Für jede Formel φ gilt:

$$\varphi \Leftrightarrow \varphi \tag{1.2}$$

Das bedeutet, dass logische Äquivalenz reflexiv ist. Die Äquivalenz (1.2) folgt aus Beispiel 1.11 ($\vdash \varphi \rightarrow \varphi$) und Bemerkung 1.17(iii) “ \Leftarrow ”.

Bemerkung. Logische Äquivalenz \Leftrightarrow ist auch symmetrisch und transitiv. (Siehe Übungsserie 2.) Wegen Beispiel 1.18 ist sie also eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Formeln.

THEOREM 1.19 (SATZ ÜBER LOGISCHE ÄQUIVALENZ, SUBSTITUTION). *Seien φ, β Formeln und α eine Teilformel von φ . Sei ψ ein Formel, die aus φ entstanden ist, indem in φ ein- oder mehrmals α durch eine Formel β ersetzt wurde. Dann gilt:*

$$\text{Falls } \alpha \Leftrightarrow \beta, \text{ dann ist } \varphi \Leftrightarrow \psi.$$

Beweis: [HK20, THEOREM 1.6, SUBSTITUTION THEOREM]

Beispiel. [SATZ ÜBER LOGISCHE ÄQUIVALENZ] Sei β eine Formel. Wir betrachten:

$$\varphi := \neg\neg\neg\beta \quad \alpha := \neg\neg\beta \quad \psi := \neg\beta$$

Die Formel ψ ist aus φ entstanden, indem die Teilformel α einmal durch β ersetzt wurde. Es gilt:

$$\alpha \Leftrightarrow \beta$$

(Siehe Übungsserie 2, duplex negatio affirmat = Gesetz der doppelten Negation.) Mittels des SATZES ÜBER LOGISCHE ÄQUIVALENZ folgt daher:

$$\varphi \Leftrightarrow \psi \quad \text{d. h.} \quad \neg\neg\neg\beta \Leftrightarrow \neg\beta$$

¹⁶Konjunktion ist die und-Verknüpfung.

1.1 Theorie = Menge der nicht-logischen Axiome

Dieser Abschnitt entspricht dem ersten Teil von [Hal, 1. Axiomensysteme und semi-formale Beweise]. Eine *Theorie* T im technischen Sinn ist eine Menge von Formeln, die wir *nichtlogische Axiome* nennen und zu den logischen Axiomen als Ausgangspunkt für Beweise hinzunehmen. Sie ist also ein Bestandteil der Logik erster Stufe.

Wir führen in diesem Abschnitt verschiedene Theorien ein, nämlich Gruppen-, Ring- und Körpertheorie, die Theorie der dichten lineare Ordnungen und Peano-Arithmetik. Gruppen, Ringe und Körper sind algebraische Strukturen, die Sie in der Vorlesung *Lineare Algebra I* kennengelernt haben. Diese Strukturen werden in der Vorlesung *Algebra I* im 3. Semester ausführlich behandelt.

Eine Theorie T regelt den Gebrauch der nicht-logischen Symbole der Theorie (im naiven Sinn), die wir beschreiben. Im Fall der Gruppentheorie stehen die Variablen und Konstantensymbole intuitiv für die Objekte der Gruppentheorie, d. h. für die Elemente einer festen Gruppe. Die Axiome der Gruppentheorie beschreiben die definierenden Eigenschaften einer Gruppe. Eines dieser Axiome entspricht zum Beispiel der Assoziativität der Gruppenverknüpfung.

Im Fall der Peano-Arithmetik stehen die Variablen und Konstantensymbole intuitiv für die Objekte der Arithmetik, d. h. für natürliche Zahlen. Die Axiome der Peano-Arithmetik beschreiben intuitiv Eigenschaften der Addition und der Multiplikation. Das letzte der Peano-Axiome ist das *Induktionsaxiom*.

Gruppentheorie GT

Die Signatur der Gruppentheorie ist $\mathcal{L}_{GT} := \{e, \circ\}$, wobei e ein Konstantensymbol und \circ ein zweistelliges Funktionssymbol sind. (Intuitiv spielt e die Rolle des neutralen Elements und \circ die der Gruppenverknüpfung.) Die Axiome der Gruppentheorie sind durch das folgende Axiomensystem gegeben. Rechts neben jedem Axiom ist seine intuitive Bedeutung angegeben.

$$\begin{aligned} \text{GT}_0 &: \forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z) && (\circ \text{ ist assoziativ.}) \\ \text{GT}_1 &: \forall x (e \circ x = x) && (e \text{ ist links-neutral.}) \\ \text{GT}_2 &: \forall x \exists y (y \circ x = e) && (\text{Jedes Element besitzt ein Links-Inverses.}) \end{aligned}$$

Bemerkungen 1.20. [Gruppentheorie, Symmetrien] Aus diesen Axiomen folgt:

- (i) $\forall x \forall y (y \circ x = e \rightarrow x \circ y = e)$, d. h., für jedes x ist jedes Links-Inverse für x ist auch ein Rechts-Inverses für x . (Siehe [Hal, S. 14].)

Wir nennen dieses Links-Inverse darum jetzt einfach *Inverses von* x .

- (ii) Das Inverse jedes Elementes ist eindeutig. Das folgt mittels (i).

(iii) $\forall x(x \circ e = x)$, d. h. e ist auch rechts-neutral. Das folgt mittels (i).

An dieser Stelle erinnern wir uns, dass wir in diesem syntaktischen Teil der Logik nur Beziehungen zwischen Zeichen festlegen und den Zeichenketten keine Bedeutung verleihen. Insbesondere ist \circ nur ein Funktionssymbol, keine Funktion. Wir dürfen daher die Erklärungen zu den Axiomen in Klammern nicht wörtlich nehmen. Sie dienen nur der Intuition.

Im semantischen Teil der Logik, d. h. im Rahmen von Modellen, werden wir den Symbolen jedoch eine Bedeutung verleihen. Innerhalb eines Modells M werden wir das Funktionssymbol \circ dann als eine zweistellige Funktion $\circ^M : A \times A \rightarrow A$ interpretieren, wobei A eine feste Menge ist. Das Axiom GT_0 drückt dann aus, dass die Funktion \circ^M assoziativ ist. Ähnliches gilt für die Bemerkungen neben den anderen Gruppenaxiomen. Zusammen drücken die Axiome der Gruppentheorie aus, dass das Paar (A, \circ^M) eine *Gruppe* ist. Das erklärt den Terminus *Gruppenaxiome*.

Bemerkung. [Gruppe] Gruppen spielen eine zentrale Rolle in der Mathematik und der Physik. Die Menge der Symmetrien eines gegebenen Objektes ist eine Gruppe. Das Objekt kann zum Beispiel eine geometrische Figur oder die Energiefunktion in der klassischen Mechanik sein. Im Fall der Energiefunktion führen Gruppen mittels Symmetrien zu physikalischen Erhaltungssätzen, wie zum Beispiel Impuls- und Drehimpulserhaltung.

Ringtheorie RT

Die Signatur der Ringtheorie (für Ringe mit 1) ist $\mathcal{L}_{RT} := \{0, 1, +, \cdot\}$, wobei $0, 1$ Konstantensymbole sind und $+, \cdot$ zweistellige Funktionssymbole sind. Die Axiome der Ringtheorie sind durch das folgende Axiomensystem gegeben. (Rechts neben jedem Axiom ist seine intuitive Bedeutung angegeben.)

$RT_0 : \forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$	(+ is assoziativ.)
$RT_1 : \forall x \forall y (x + y = y + x)$	(+ is kommutativ.)
$RT_2 : \forall x (0 + x = x)$	(0 is links-neutral bzgl. +.)
$RT_3 : \forall x \exists y (y + x = 0)$	(links-Inverses bzgl. +.)
$RT_4 : \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$	(\cdot ist assoziativ.)
$RT_5 : \forall x (1 \cdot x = x \wedge x \cdot 1 = x)$	(1 ist neutral bzgl. \cdot .)
$RT_6 : \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))$	(\cdot ist links-distributiv über +.)
$RT_7 : \forall x \forall y \forall z ((x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z))$	(\cdot ist rechts-distributiv über +.)

Bemerkungen. [Ringtheorie]

- Die Axiome RT_0, RT_2, RT_3 stimmen mit dem Axiomensystem der Gruppentheorie überein, falls wir e, \circ durch $0, +$ ersetzen. Es gelten daher die entsprechenden Bemerkungen 1.20.
- Wie wir im Teil über Modelle sehen werden, beschreiben die Axiome der Ringtheorie *Ringe*.

Körpertheorie KT

Die Signatur der Körpertheorie ist die gleiche wie die der Ringtheorie, also $\mathcal{L}_{KT} := \{0, 1, +, \cdot\}$, wobei $0, 1$ Konstantensymbole sind und $+, \cdot$ zweistellige Funktionssymbole sind. Die Axiome der Körpertheorie sind:

$KT_0 \equiv RT_0 :$	$\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$	(+ is assoziativ.)
$KT_1 \equiv RT_1 :$	$\forall x \forall y (x + y = y + x)$	(+ is kommutativ.)
$KT_2 \equiv RT_2 :$	$\forall x (0 + x = x)$	(0 is links-neutral bzgl. +.)
$KT_3 \equiv RT_3 :$	$\forall x \exists y (y + x = 0)$	(links-Inverses bzgl. +.)
$KT_4 \equiv RT_4 :$	$\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$	(\cdot ist assoziativ.)
$KT_5 :$	$\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$	(\cdot ist kommutativ.)
$KT_6 :$	$\forall x (1 \cdot x = x)$	(1 ist links-neutral bzgl. \cdot .)
$KT_7 :$	$\forall x \exists y (x \neq 0 \rightarrow y \cdot x = 1)$	(links-Inverses bzgl. \cdot für $x \neq 0$)
$KT_8 \equiv RT_6 :$	$\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))$	(\cdot ist links-distributiv über +.)
$KT_9 :$	$0 \neq 1$	(0 ist verschieden von 1.)

Bemerkungen. [Körpertheorie, Vektorräume]

- Die Axiome für die Körpertheorie sind ähnlich zu denjenigen für die Ringtheorie. Wie oben angegeben, sind die Axiome KT_i , für $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$ identisch mit gewissen Ringaxiomen.
- Im Unterschied zur Ringtheorie gilt in der Körpertheorie das Folgende:
 - Multiplikation \cdot ist kommutativ (KT_5).
 - Jedes von Null verschiedene Element besitzt ein links-Inverses bzgl. der Multiplikation \cdot .
 - $0 \neq 1$ (KT_9)
- Das Axiom KT_6 (1 ist links-neutral bzgl. \cdot) ist eine vereinfachte Version von RT_5 . Wegen KT_5 (Kommutativität von \cdot) enthält es dieselbe Information. Das Axiom RT_7 (rechts-Distributivität von \cdot über $+$) ist in der Körpertheorie wegen KT_5 überflüssig.

- Wie wir im Teil über Modelle sehen werden, beschreiben die Axiome der Körpertheorie *Körper*. In einem Körper können wir wie gewohnt rechnen, d. h. addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren.
- In der linearen Algebra bildet die Menge der *Skalare* einen Körper. Der Begriff eines *Vektorraumes* über einem Körper spielt dort eine zentrale Rolle.

Dichte Lineare Ordnungen DLO

Die Signatur der Theorie der dichten linearen Ordnungen ist $\mathcal{L}_{\text{DLO}} := \{<\}$, wobei $<$ ein zweistelliges Relationssymbol ist. Die Axiome der Theorie der dichten linearen Ordnungen sind:

DLO ₀ :	$\forall x \neg(x < x)$	($<$ ist irreflexiv.)
DLO ₁ :	$\forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$	($<$ ist transitiv.)
DLO ₂ :	$\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$	($<$ ist linear = total.)
DLO ₃ :	$\forall x \forall y \exists z (x < y \rightarrow (x < z \wedge z < y))$	($<$ ist dicht.)
DLO ₄ :	$\forall x \exists y \exists z (y < x \wedge x < z)$	(kein kleinstes und kein grösstes Element)

Bemerkungen. [dichte lineare Ordnung]

- Das Axiom DLO₂ besagt intuitiv, dass alle Paare von Objekten vergleichbar sind.
- Das Axiom DLO₃ besagt intuitiv, dass es zwischen je zwei Objekten ein drittes gibt. Das bedeutet, dass $<$ im Sinn der Ordnungstheorie *dicht* ist.¹⁷
- Die Axiome für dichte lineare Ordnungen werden später in dieser Vorlesung bei der axiomatischen Beschreibung der reellen Zahlen eine Rolle spielen.

Peano-Arithmetik PA

Die Signatur der Peano-Arithmetik ist $\mathcal{L}_{\text{PA}} := \{0, s, +, \cdot\}$, wobei 0 ein Konstantensymbol und $s, +, \cdot$ Funktionssymbole der Stelligkeiten 1, 2, 2 sind. Die Axiome der Peano-Arithmetik sind:

PA ₀ :	$\neg \exists x (s x = 0)$	(0 ist kein Nachfolger.)
PA ₁ :	$\forall x \forall y (s x = s y \rightarrow x = y)$	(s ist injektiv.)
PA ₂ :	$\forall x (x + 0 = x)$	(0 ist rechts-neutral.)
PA ₃ :	$\forall x \forall y (x + s y = s(x + y))$	(Das definiert mit PA ₂ zusammen +.)
PA ₄ :	$\forall x (x \cdot 0 = 0)$	(Das definiert $x \cdot 0$.)
PA ₅ :	$\forall x \forall y (x \cdot s y = (x \cdot y) + x)$	(Das definiert mit PA ₄ zusammen \cdot .)

¹⁷Dieser Begriff unterscheidet sich von demjenigen der Dichtheit einer Teilmenge eines topologischen Raumes.



Abbildung 1.2: Giuseppe Peano, 1858–1932, italienischer Mathematiker.

Sei φ eine \mathcal{L}_{PA} -Formel und $\nu \in \text{frei } \varphi$ eine Variable.

$$\text{PA}_6 : \left(\varphi(0) \wedge \forall \nu (\varphi(\nu) \rightarrow \varphi(s\nu)) \right) \rightarrow \forall \nu \varphi(\nu) \quad (\text{Induktion})$$

Bemerkungen. [Peano-Arithmetik]

- Die Peano-Arithmetik ist nach Giuseppe Peano benannt. Siehe Abbildung 1.2. Intuitiv beschreibt diese Arithmetik die (natürlichen) Zahlen zusammen mit der Addition und der Multiplikation. Jede Variable spielt die Rolle einer Zahl. Das Symbol s spielt die Rolle der *Nachfolgerfunktion*. Intuitiv ist für jede Zahl x der Ausdruck sx (“ $s(x)$ ”) die nach x nächstgrössere Zahl, also zum Beispiel $s0 = 1, s1 = 2, s2 = 3$.
- PA_1 besagt intuitiv, dass die Nachfolgerfunktion injektiv ist, d. h., dass verschiedene Zahlen verschiedene Nachfolger haben.
- Intuitiv ist $+$ eine Funktion mit zwei Argumenten, die durch PA_2 und PA_3 rekursiv im zweiten Argument y definiert wird. (Idee: Gemäss PA_2 ist $x + 0 := x$, gemäss PA_3 ist daher $x + 1 = x + s(0) := s(x + 0) = s(x)$, $x + 2 = x + s(1) := s(x + 1) = s(s(x))$, ...)
- Intuitiv ist \cdot eine Funktion mit zwei Argumenten, die durch PA_4 und PA_5 rekursiv im zweiten Argument y definiert wird. (Idee: Gemäss PA_4 ist $x \cdot 0 := 0$, gemäss PA_5 ist daher $x \cdot 1 = x \cdot s(0) := x \cdot 0 + x = 0 + x = x$, $x \cdot 2 = x \cdot s(1) := x \cdot 1 + x = x + x$, ...)
- PA_6 : Wir erinnern uns, dass für jeden Term τ der Ausdruck $\varphi(\tau) := \varphi(\nu/\tau)$ die Formel φ ist, in der an jeder Stelle, an der ν frei vorkommt, die Variable ν durch τ substituiert wurde.

- PA_6 : $\varphi(\nu)$ ist gemäss (1.1) identisch zu φ . Wir schreiben hier ν , um zu betonen, dass φ intuitiv von ν abhängt, da ν frei in φ vorkommt.
- PA_6 heisst *Induktions-Axiom*. Es wird für Induktionsbeweise verwendet. Im Unterschied zu PA_0 - PA_5 ist PA_6 ein Axiomenschema, d. h. eine Konstruktionsvorschrift für Axiome. Es liefert ein Axiom für jede Formel φ und jede Variable ν , die in φ frei vorkommt. Zum Beispiel erhalten wir mittels PA_6 für $\varphi \equiv 0 + x = x$ und $\nu \equiv x$ das Axiom:

$$\left(0 + 0 = 0 \wedge \forall x(0 + x = x \rightarrow 0 + sx = sx) \rightarrow \forall x(0 + x = x)\right)$$

Wir können mittels dieses Axioms die Formel $\forall x(0 + x = x)$ aus PA beweisen. (Siehe Beispiel 1.21.) Da PA_6 ein Axiomenschema ist, besteht das Axiomensystem der Peano-Arithmetik aus unendlich vielen Axiomen.

Beispiel 1.21. [Induktionsbeweis] **Behauptung:**

$$PA \vdash \forall y(0 + y = y) \tag{1.3}$$

Bemerkung: Intuitiv bedeutet das, dass 0 links-neutral ist.

Beweis der Behauptung (1.3): Wir verwenden Induktion, d. h. das Axiomenschema PA_6 .

Induktionsverankerung: Es gilt:

$$PA_2 \equiv \forall x(x + 0 = x) \vdash 0 + 0 = 0 \tag{1.4}$$

Das folgt mit Hilfe von L_{10} (universal instantiation) und (MP).

Induktionsschritt: Behauptung:

$$PA_3 \vdash 0 + sy = s(0 + y) \tag{1.5}$$

Beweis:

$$\begin{array}{ll} \varphi_0 : \forall x \forall y (x + sy = s(x + y)) & \text{(Annahme } PA_3) \\ \varphi_1 : \forall x \forall y (x + sy = s(x + y)) \rightarrow \forall y (0 + sy = s(0 + y)) & (L_{10}, \text{ universal instantiation}) \\ \varphi_2 : \forall y (0 + sy = s(0 + y)) & \text{(aus } \varphi_0, \varphi_1 \text{ und MP)} \\ \varphi_3 : \forall y (0 + sy = s(0 + y)) \rightarrow 0 + sy = s(0 + y) & (L_{10}, \text{ universal instantiation}) \\ \varphi_4 : 0 + sy = s(0 + y) & \text{(aus } \varphi_2, \varphi_3 \text{ und MP)} \end{array}$$

Das beweist die Behauptung (1.5).

Es gilt $L_{16} \vdash 0 + y = y \rightarrow s(0 + y) = sy$. Mittels (MP) erhalten wir daraus:

$$0 + y = y \vdash s(0 + y) = sy \tag{1.6}$$

Gemäss einer Aufgabe aus Übungsserie 2 (Konjunktion, Existenz) gilt

$$0 + sy = s(0 + y), \quad s(0 + y) = sy \quad \vdash \quad 0 + sy = s(0 + y) \wedge s(0 + y) = sy \quad (1.7)$$

Behauptung:

$$0 + sy = s(0 + y) \wedge s(0 + y) = sy \quad \vdash \quad 0 + sy = sy \quad (1.8)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \varphi_0 : \quad & 0 + sy = s(0 + y) \wedge s(0 + y) = sy && \text{(Annahme)} \\ \varphi_1 : \quad & \forall u \forall v \forall w \left((u = v \wedge v = w) \rightarrow u = w \right) && \text{(Transitivität von “=”, Serie 2)} \\ \varphi_2 : \quad & \forall v \forall w \left((0 + sy = v \wedge v = w) \rightarrow 0 + sy = w \right) && \text{(L}_{10}, \text{ universal instantiation)} \\ \varphi_3 : \quad & \forall w \left((0 + sy = s(0 + y) \wedge s(0 + y) = w) \rightarrow 0 + sy = w \right) && \text{(L}_{10}) \\ \varphi_4 : \quad & (0 + sy = s(0 + y) \wedge s(0 + y) = sy) \rightarrow 0 + sy = sy && \text{(L}_{10}) \\ \varphi_5 : \quad & 0 + sy = sy && (\varphi_0, \varphi_4, \text{(MP)}) \end{aligned}$$

Das beweist die Behauptung (1.8). Aus (1.5,1.6,1.7,1.8) folgt, dass gilt:

$$\text{PA}_3, 0 + y = y \quad \vdash \quad 0 + sy = sy$$

Gemäss dem DEDUKTIONSTHEOREM 1.13 folgt daraus, dass:

$$\text{PA}_3 \vdash 0 + y = y \rightarrow 0 + sy = sy$$

Mittels Verallgemeinerung folgt daraus, dass:

$$\text{PA}_3 \vdash \forall y (0 + y = y \rightarrow 0 + sy = sy) \quad (1.9)$$

Das schliesst den Induktionsschritt ab.

Aus (1.4,1.9) folgt mittels einer Aufgabe aus Serie 2 (Konjunktion, Existenz), dass gilt:

$$\text{PA} \vdash 0 + 0 = 0 \wedge \forall y (0 + y = y \rightarrow 0 + sy = sy)$$

Mittels PA_6 (**Induktion**) mit $\varphi \equiv 0 + y = y$, $\nu \equiv y$ und (MP) erhalten wir daraus:

$$\text{PA} \vdash \forall y \varphi(y) \equiv \forall y (0 + y = y)$$

Das beweist die Behauptung (1.3).

Bemerkungen. • Im Beweis von (1.8) in φ_1 haben wir eine Version einer Aufgabe aus Übungsserie 2 (Gleichheitsrelation transitiv) verwendet, in der wir x, y, z durch u, v, w ersetzt haben. Diese Version kann auf analoge Weise gezeigt werden.

- In Übungsserie 3 haben wir nochmals auf eine semi-formale Weise bewiesen, dass $\text{PA} \vdash \forall x (0 + x = x)$.

1.2 Semi-formale Beweise

Dieser Abschnitt entspricht dem zweiten Teil von [Hal, 1. Axiomensysteme und semi-formale Beweise]. Mit einem *semi-formalen Beweis* meinen wir einen formalen Beweis, bei dem wir alle Schritte weggelassen haben, die auf logischen Axiomen beruhen. In einem solchen Beweis führen wir also nur die Schritte durch, die auf den nicht-logischen Axiomen beruhen. Wir verwenden in einem semi-formalen Beweis ausser logischen Symbolen auch die natürliche Sprache. Dabei verwenden wir einen eingeschränkten Wortschatz, der aus Wörtern und Ausdrücken mit präziser und eindeutiger Bedeutung besteht. Ein Beispiel für einen solchen Ausdruck ist *Wir nehmen an, dass . . .*

Der Begriff eines *semi-formalen Beweises* ist kein präziser mathematischer Begriff. Der Zweck eines solchen Beweises ist es, einen formalen Beweis zu vereinfachen. Wie wir gesehen haben, werden formale Beweise selbst einfacher Formeln nämlich schnell lang. In mathematischen Texten werden daher in aller Regel semi-formale Beweise statt formale Beweise geführt.

Beispiel 1.22. [semi-formaler Beweis von $\text{PA} \vdash 1 + 1 = 2$] Wir zeigen, dass $\text{PA} \vdash s0 + s0 = ss0$:

$$s0 + s0 \stackrel{\text{PA}_3}{=} s(s0 + 0) \stackrel{\text{PA}_2}{=} ss0$$

Gemäss einer Aufgabe in Übungsserie 2 ist die Gleichheitsrelation “=” transitiv. Es folgt, dass $s0 + s0 = ss0$, wie behauptet.

Bemerkung. In der Lösung zur Übungsserie 3 beweisen wir die Aussage $\text{PA} \vdash s0 + s0 = ss0$ formal in 17 Schritten. Der obige semi-formale Beweis ist also deutlich kürzer.

Beispiel. [semi-formaler Beweis von $\text{PA} \vdash \forall x(2x = x + x)$] Behauptung:

$$\text{PA} \vdash \forall x(ss0 \cdot x = x + x) \tag{1.10}$$

Beweis: Wir definieren $\varphi(x) :\equiv ss0 \cdot x = x + x$. Wir verwenden Induktion.

Induktionsverankerung $\text{PA} \vdash \varphi(0)$: Es gilt $\text{PA} \vdash ss0 \cdot 0 \stackrel{\text{PA}_4}{=} 0 \stackrel{\text{PA}_2}{=} 0 + 0$.

Induktionsschritt $\text{PA} \vdash \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(sx))$: Wir nehmen PA an. Sei x so, dass $ss0 \cdot x = x + x$. Wir haben

$$\begin{aligned} ss0 \cdot sx &\stackrel{\text{PA}_5}{=} (ss0 \cdot x) + ss0 \\ &= (x + x) + (s0 + s0) && \text{gemäss Induktionsannahme und Beispiel 1.22} \\ &= (x + s0) + (x + s0) && \text{Assoziativität und Kommutativität von } + \text{ (Übungsserie 3)} \\ &\stackrel{\text{PA}_3}{=} s(x + 0) + s(x + 0) \\ &\stackrel{\text{PA}_2}{=} sx + sx \end{aligned}$$

Das schliesst den Induktionsschritt ab.

Gemäss Induktionsverankerung und Induktionsschritt gilt $PA \vdash \varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(sx))$. Mittels des Induktionsaxioms PA_6 und des Modus Ponens folgt daraus, dass $\forall x\varphi(x)$, d. h.:

$$\forall x(ss0 \cdot x = x + x)$$

1.3 Modelle

In den Abschnitten 1.0 und 1.1 haben wir die Syntax der Logik erster Stufe eingeführt. Diese beschreibt die Regeln, nach denen Terme und wohlgebildete Formeln gebildet werden und aus gegebenen Formeln eine neue Formel abgeleitet wird. Die Syntax verleiht den Formeln *keine* Bedeutung.

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der *Semantik* der Logik erster Stufe, d. h. der Lehre der Interpretation der Zeichen. Im Gegensatz zur Syntax verleiht die Semantik den Formeln intuitiv eine Bedeutung. Ein wichtiges semantisches Konzept ist das eines *Modells*. Es basiert auf dem Begriff einer *Interpretation*, welcher seinerseits auf dem Begriff einer Variablenbelegung basiert. Eine *Variablenbelegung* ordnet jeder Variable einer Theorie ein Objekt in einer festen Menge A zu. Zum Beispiel kann eine solche Belegung der Variable x das Objekt $1 \in A := \mathbb{Z}$ zuordnen. Intuitiv *interpretiert* eine Variablenbelegung also jede Variable als ein Objekt aus A . Eine *Struktur* interpretiert die nicht-logischen Symbole einer Theorie. Zum Beispiel enthält die Gruppentheorie die nicht-logischen Symbole e und \circ , die eine Struktur als *neutrales Element* und *Gruppenverknüpfung* der Gruppe $A = \mathbb{Z}$ interpretieren kann. Eine *Interpretation* ist eine Struktur zusammen mit einer Variablenbelegung. Ein *Modell* einer Theorie ist schliesslich eine Struktur, in welcher die nichtlogischen Axiome (d. h. die Theorie) für jede Variablenbelegung wahr sind. Zum Beispiel wird ein Modell der Gruppentheorie durch eine Gruppe gegeben.

Die Hauptresultate dieses Abschnitts sind der Korrektheitssatz und der Gödelsche Vollständigkeitssatz. Zusammen besagen diese Sätze, dass ein Satz, d. h. eine geschlossene Formel, genau dann in einer Theorie bewiesen werden kann, falls er in jedem Modell der Theorie wahr ist. Mittels des Gödelschen Vollständigkeitssatzes können wir ein Theorem beweisen, indem wir zeigen, dass das Theorem in jedem Modell der Theorie wahr ist. Das vereinfacht Beweise sehr.

Struktur, Variablenbelegung, Interpretation, Modell

Sei \mathcal{L} eine Signatur.

DEFINITION 1.23 (Struktur). *Eine \mathcal{L} -Struktur ist ein Paar (A, \mathbf{M}) , wobei A eine nichtleere Menge ist und \mathbf{M} eine Abbildung, die*

- jedem Konstantensymbol $c \in \mathcal{L}$ ein Element $c^{\mathbf{M}} := \mathbf{M}(c) \in A$ zuordnet,
- jedem n -stelligen Funktionssymbol $F \in \mathcal{L}$ eine Funktion $F^{\mathbf{M}} := \mathbf{M}(F) : A^n \rightarrow A$ zuordnet,
- jedem n -stelligen Relationssymbol $R \in \mathcal{L}$ eine Teilmenge $R^{\mathbf{M}} := \mathbf{M}(R) \subseteq A^n$ zuordnet.

Wir nennen A den Bereich von \mathbf{M} . Wir schreiben abkürzend $\mathbf{M} := (A, \mathbf{M})$.

Bemerkungen. [Struktur, Relation]

- Eine n -stellige *Relation* auf einer Menge A ist eine Teilmenge \mathcal{R} von A^n . Im Fall $n = 2$ heisst ein solches \mathcal{R} eine *binäre* Relation auf A . Intuitiv sind die Elemente von \mathcal{R} diejenigen n -Tupel, die “miteinander in Beziehung stehen”. Zum Beispiel ist

$$\mathcal{R} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$$

eine binäre Relation auf der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen, die wir *Kleiner-Gleich-Relation* nennen.

- Gemäss Definition 1.23 ordnet eine Struktur (A, \mathbf{M}) einem n -stelligen Relationssymbol $R \in \mathcal{L}$ eine n -stellige Relation $R^{\mathbf{M}}$ auf A zu.

Beispiele 1.24. [Struktur]

- (i) (Gruppentheorie) Wir betrachten die Signatur der Gruppentheorie, $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{\text{GT}} = \{e, \circ\}$. Seien e und α zwei verschiedene Objekte. Wir definieren den Bereich $A := \{e, \alpha\}$ und die Abbildung $\circ : A^2 = A \times A \rightarrow A$ durch die folgende Tabelle:

\circ	e	α
e	e	α
α	α	e

(Es gilt also zum Beispiel $e \circ e \equiv e$.) Wir definieren die Abbildung \mathbf{M} auf \mathcal{L}_{GT} durch:

$$e^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}(e) := e \quad \circ^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}(\circ) := \circ$$

Das Paar (A, \mathbf{M}) ist eine \mathcal{L}_{GT} -Struktur.

- (ii) (Gruppentheorie) Wir betrachten die Signatur der Gruppentheorie, $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{\text{GT}} = \{e, \circ\}$. Seien e und α zwei verschiedene Objekte. Wir definieren den Bereich $A := \{e, \alpha\}$, $\circ : A^2 \rightarrow A$ als die konstante Abbildung $\circ(a, b) := e$, für jedes $(a, b) \in A^2$, und $e^{\mathbf{M}} := e$, $\circ^{\mathbf{M}} := \circ$. Das Paar (A, \mathbf{M}) ist eine \mathcal{L}_{GT} -Struktur.

- (iii) (Peano-Arithmetik) Wir betrachten die Signatur der Peano-Arithmetik, $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{\text{PA}} = \{0, s, +, \cdot\}$. Wir nehmen an, dass das Alphabet der Metasprache den Strich $|$ enthält. Wir schreiben ε für die leere Zeichenkette. Wir definieren \mathbb{N} als die Menge der ENDLICHEN Zeichenketten

$$\varepsilon \quad | \quad || \quad ||| \quad \dots$$

Wir nennen die Elemente von \mathbb{N} *natürliche Zahlen*. Wir definieren die Abbildung \mathbb{N} auf \mathcal{L}_{PA} wie folgt¹⁸:

$$\begin{aligned} 0^{\mathbb{N}} &:= \varepsilon \\ s^{\mathbb{N}} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, \quad s^{\mathbb{N}}(a) := |a \\ +^{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, \quad +^{\mathbb{N}}(a, b) := ab \quad (\text{Verkettung}) \\ \cdot^{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, \quad \cdot^{\mathbb{N}}(a, b) := a \cdots a \quad (\text{je eine Kopie von } a \text{ für jeden Strich } | \text{ in } b) \end{aligned}$$

Das Paar (\mathbb{N}, \mathbb{N}) ist eine \mathcal{L}_{PA} -Struktur.

Sei $\mathbf{M} := (A, \mathbf{M})$ eine \mathcal{L} -Struktur.

DEFINITION 1.25 (Variablenbelegung j in \mathbf{M} , j_{ν}^a , \mathcal{L} -Interpretation). (i) Eine Variablenbelegung in \mathbf{M} ist eine Abbildung

$$j : \{\text{Variable}\} \rightarrow A.$$

- (ii) Sei j eine Variablenbelegung in \mathbf{M} , ν eine Variable und $a \in A$. Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned} j_{\nu}^a &: \{\text{Variable}\} \rightarrow A \\ j_{\nu}^a(\nu') &:= \begin{cases} a, & \text{falls } \nu' \equiv \nu, \\ j(\nu'), & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

- (iii) Eine \mathcal{L} -Interpretation ist ein Paar $\mathbf{I} = (\mathbf{M}, j)$, wobei \mathbf{M} eine \mathcal{L} -Struktur und j eine Variablenbelegung in \mathbf{M} ist.

- (iv) Sei $\mathbf{I} = (\mathbf{M}, j)$ eine \mathcal{L} -Interpretation, ν eine Variable und $a \in A$. Wir definieren

$$\mathbf{I}_{\nu}^a := (\mathbf{M}, j_{\nu}^a).$$

Bemerkung. j_{ν}^a ist eine Variablenbelegung in \mathbf{M} .

Sei $\mathbf{I} = (\mathbf{M}, j)$ eine \mathcal{L} -Interpretation.

¹⁸Hierbei stehen a und b für ENDLICHE (möglicherweise leere) Zeichenketten der Form $|\cdots|$.

DEFINITION 1.26 (Interpretation eines Terms). *Wir definieren die Abbildung*

$$\mathbf{I}(\cdot) : \{\mathcal{L}\text{-Term}\} \rightarrow A$$

rekursiv durch:

(a) $\mathbf{I}(\nu) := j(\nu) \in A$ für jede Variable ν

(b) $\mathbf{I}(c) := c^{\mathbf{M}} \in A$ für jedes Konstantensymbol

(c) $\mathbf{I}(F\tau_1 \cdots \tau_n) := F^{\mathbf{M}}(\mathbf{I}(\tau_1), \dots, \mathbf{I}(\tau_n))$ für jedes n -stellige Funktionssymbol $F \in \mathcal{L}$ und \mathcal{L} -Terme τ_1, \dots, τ_n

Bemerkungen. [Interpretation eines Terms, Rekursion]

- Die Teile (a,b) der obigen Definition bilden den Rekursionsanfang. Der Teil (c) bildet den Rekursionsschritt. Hier verwenden wir, dass $\mathbf{I}(\tau_1), \dots, \mathbf{I}(\tau_n)$ schon definiert wurden.
- Wir fassen die Elemente von A als Objekte auf. Eine Interpretation ordnet also jedem Term ein Objekt zu.

Beispiel 1.27. [Variablenbelegung, Interpretation eines Terms] Wir betrachten die Struktur (A, \mathbf{M}) aus Beispiel 1.24(i) und die Variablenbelegung

$$j : \{\text{Variable}\} \rightarrow A = \{e, \alpha\}, \quad j(\nu) := \alpha \text{ für jedes } \nu.$$

Es gilt:

$$\mathbf{I}(x) \equiv b \quad \mathbf{I}(e) \equiv e^{\mathbf{M}} \equiv e \quad \mathbf{I}(xoe) \equiv \mathbf{I}(oxe) \equiv \circ^{\mathbf{M}}(\mathbf{I}(x), \mathbf{I}(e)) \equiv \circ(\alpha, e) \equiv \alpha \circ e \equiv \alpha$$

DEFINITION 1.28 (Gültigkeit einer Formel in einer Interpretation). *Für eine Formel φ definieren wir $\mathbf{I} \models \varphi$, d. h. φ gilt in \mathbf{I} , d. h. φ ist bezüglich \mathbf{I} wahr, rekursiv wie folgt:*

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \models \tau_1 = \tau_2 & \quad :\Leftrightarrow \quad \mathbf{I}(\tau_1) \text{ IST DASSELBE OBJEKT WIE } \mathbf{I}(\tau_2). \\ \mathbf{I} \models R\tau_1 \cdots \tau_n & \quad :\Leftrightarrow \quad (\mathbf{I}(\tau_1), \dots, \mathbf{I}(\tau_n)) \text{ IST EIN ELEMENT DER MENGE } R^{\mathbf{M}}. \\ \mathbf{I} \models \neg\psi & \quad :\Leftrightarrow \quad \text{NICHT } \mathbf{I} \models \psi \\ \mathbf{I} \models \psi_1 \wedge \psi_2 & \quad :\Leftrightarrow \quad \mathbf{I} \models \psi_1 \text{ UND } \mathbf{I} \models \psi_2 \\ \mathbf{I} \models \psi_1 \vee \psi_2 & \quad :\Leftrightarrow \quad \mathbf{I} \models \psi_1 \text{ ODER } \mathbf{I} \models \psi_2 \\ \mathbf{I} \models \psi_1 \rightarrow \psi_2 & \quad :\Leftrightarrow \quad \text{FALLS } \mathbf{I} \models \psi_1, \text{ DANN } \mathbf{I} \models \psi_2 \\ \mathbf{I} \models \exists\nu\psi & \quad :\Leftrightarrow \quad \text{ES EXISTIERT EIN } a \text{ IN } A \text{ MIT } \mathbf{I} \frac{a}{\nu} \models \psi. \\ \mathbf{I} \models \forall\nu\psi & \quad :\Leftrightarrow \quad \text{FÜR JEDES } a \text{ IN } A \text{ GILT } \mathbf{I} \frac{a}{\nu} \models \psi. \end{aligned}$$

Wir schreiben $\mathbf{I} \not\models \varphi$ g. d. w. $\mathbf{I} \models \varphi$ nicht gilt.

Bemerkungen. • In dieser Definition stehen auf der rechten Seite metamathematische Bedingungen. (Vergleiche mit Bemerkung 1.12.)

- Gemäss DEFINITION 1.4 entsteht jede Formel durch endlich viele Anwendungen der Regeln (F0-F4). Diese Regeln entsprechen den Ausdrücken $\tau_1 = \tau_2$ usw., die in Definition 1.28 auf der linken Seite auftreten. Daher ist diese rekursive Definition der Bedingung $\mathbf{I} \models$ sinnvoll.

Beispiel. [Gültigkeit einer Formel in einer Interpretation] Wir betrachten die \mathcal{L}_{GT} -Struktur (A, \mathbf{M}) aus Beispiel 1.24(i) und die Variablenbelegung aus Beispiel 1.27. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \models x = y \quad \mathbf{I} \not\models x = e \quad \mathbf{I} \models x \circ e = x \quad \mathbf{I} \models \exists x(x = e) \\ \mathbf{I} \models \varphi := \forall x(\neg(x = e) \vee \neg(x = y)) \quad \mathbf{I} \models \forall x \exists y(x = y) \end{aligned}$$

Im Fall von φ verwenden, dass für $a \equiv e$ gilt $\mathbf{I}_x^a \not\models x = y$ und für $a \equiv \alpha$ gilt $\mathbf{I}_x^a \not\models x = e$. (Warum gelten diese Aussagen?)

Sei \mathcal{L} eine Signatur und $\mathbf{M} = (A, \mathbf{M})$ eine \mathcal{L} -Struktur.

DEFINITION 1.29 (Modell). (i) Sei φ eine \mathcal{L} -Formel. Wir nennen \mathbf{M} ein Modell von φ g. d. w. für jede Variablenbelegung j in \mathbf{M} gilt $(M, j) \models \varphi$. Wir schreiben:

$$\mathbf{M} \models \varphi \quad :\Leftrightarrow \quad \mathbf{M} \text{ ist ein Modell von } \varphi.$$

(ii) Sei Φ eine Menge von \mathcal{L} -Formeln. Wir nennen \mathbf{M} ein Modell von Φ g. d. w. \mathbf{M} ein Modell jeder Formel in Φ ist. Wir schreiben:

$$\mathbf{M} \models \Phi \quad :\Leftrightarrow \quad \mathbf{M} \text{ ist ein Modell von } \Phi.$$

Beispiele. [Modell]

(i) Die \mathcal{L}_{GT} -Struktur $(A = \{e, \alpha\}, \mathbf{M})$ aus Beispiel 1.24(i) ist ein Modell der Gruppentheorie $\Phi := \text{GT}$. Es gilt nämlich:

- $\mathbf{M} \models \text{GT}_0$, d. h., für jede Variablenbelegung j in \mathbf{M} gilt $(M, j) \models \text{GT}_0$, d. h., $\circ^{\mathbf{M}} \equiv \circ$ ist assoziativ.
- $\mathbf{M} \models \text{GT}_1$, d. h., $e^{\mathbf{M}} \equiv e$ ist links-neutral.
- $\mathbf{M} \models \text{GT}_2$, d. h., jedes Element von A besitzt ein Links-Inverses.

(Überprüfen Sie diese Aussagen!)

(ii) Die \mathcal{L}_{GT} -Struktur (A, \mathbf{M}) aus Beispiel 1.24(ii) ist *kein* Modell der Gruppentheorie. (Warum?)

- (iii) Die \mathcal{L}_{PA} -Struktur (\mathbb{N}, \mathbb{N}) aus Beispiel 1.24(iii) ist ein Modell der Peano-Arithmetik PA. (Siehe Übungsserie 4.) Wir überprüfen exemplarisch, dass $\mathbb{N} \models \text{PA}_0$: Sei j eine Variablenbelegung für \mathbb{N} . Wir schreiben $\mathbf{I} := (\mathbb{N}, j)$. Sei $a \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$\mathbf{I} \stackrel{a}{x} (s x) \equiv s^{\mathbb{N}}(\mathbf{I} \stackrel{a}{x} (x)) \equiv |a| \neq \varepsilon$$

Das bedeutet, dass es nicht ein $a \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt:

$$\mathbf{I} \stackrel{a}{x} (s x) \equiv \varepsilon \equiv 0^{\mathbb{N}} \quad \text{d. h.} \quad \mathbf{I} \stackrel{a}{x} \vdash s x = 0$$

Das bedeutet, dass gilt:

$$\mathbf{I} \not\models \exists x (s x = 0) \quad \text{d. h.} \quad \mathbf{I} \models \neg \exists x (s x = 0) \quad \text{d. h.} \quad \mathbf{I} \models \text{PA}_0$$

Jedes Modell der Gruppentheorie ist eine Gruppe. Um das zu erklären, benötigen wir den folgenden Begriff.

DEFINITION 1.30 (Gruppe). *Eine Gruppe ist ein Tripel (G, e, \circ) , wobei G eine Menge ist, $e \in G$ und $\circ : G \times G \rightarrow G$ eine Abbildung, sodass gilt:*

- (Assoziativität) $g \circ (h \circ k) \equiv (g \circ h) \circ k$ für alle $g, h, k \in G$
- (neutrales Element) $e \circ g \equiv g \equiv g \circ e$ für jedes $g \in G$
- (Inverses) Für jedes $g \in G$ gibt es ein $h \in G$, sodass $h \circ g \equiv e$.

Wir nennen \circ die Gruppenverknüpfung (oder Gruppenoperation) und e das neutrale Element.

Bemerkungen. [alternative Definition des Begriffes einer Gruppe]

- In der Vorlesung *Lineare Algebra* wurde der Begriff einer Gruppe alternativ wie folgt definiert. Eine Gruppe ist ein Paar (G, \circ) , wobei G eine Menge ist und $\circ : G \times G \rightarrow G$ eine Abbildung, sodass gilt:

- (Assoziativität) $g \circ (h \circ k) \equiv (g \circ h) \circ k$, für alle $g, h, k \in G$
- (neutrales Element) Es gibt ein $e \in G$, sodass $e \circ g \equiv g \equiv g \circ e$, für jedes $g \in G$.

Wir nennen ein solches e ein *neutrales Element von (G, \circ)* .

- (Inverses) Für jede neutrale Element e von (G, \circ) und jedes $g \in G$ gibt es ein $h \in G$, sodass $h \circ g \equiv e$.

- Das neutrale Element e wie oben ist eindeutig (falls es existiert). Beweis: Falls e, e' neutrale Elemente sind, dann gilt $e \equiv e \circ e' \equiv e'$.
- Diese Definition des Begriffes einer Gruppe und Definition 1.30 sind äquivalent im Sinn, dass die Abbildung

$$f : \{\text{Gruppe im Sinn von Definition 1.30}\} \rightarrow \{\text{Gruppe im Sinn der Vorlesung } \textit{Lineare Algebra}\},$$

eine wohldefinierte Bijektion ist.

Bemerkung. [Gruppe, Modell der Gruppentheorie] Ein Tripel (G, e, \circ) ist genau dann eine Gruppe (wie in Definition 1.30), falls es ein Modell \mathbf{M} der Gruppentheorie GT mit Bereich G gibt, sodass $(e, \circ) \equiv (e^{\mathbf{M}}, \circ^{\mathbf{M}})$. (Überprüfen Sie das!)

Bemerkungen. [Ring, Körper, Modell der Ring-, Körpertheorie] Analoge Bemerkungen gelten für Ringe und Körper:

- Ein *Ring* ist per definitionem ein Tupel $(R, \mathbf{0}, \mathbf{1}, +, \cdot)$, wobei R eine Menge, $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in R$ Elemente und $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$ Abbildungen sind, sodass die Bedingungen gelten, die wir aus den Ringaxiomen RT₀-RT₇ erhalten, indem wir $\forall, \exists, 0, 1, +, \cdot$ durch *für jedes, es gibt, $\mathbf{0}, \mathbf{1}, +, \cdot$* ersetzen. (Das stimmt mit der Definition aus der Vorlesung *Lineare Algebra* überein.) Ein Tupel $(R, \mathbf{0}, \mathbf{1}, +, \cdot)$ ist genau dann ein Ring, falls es ein Modell \mathbf{M} der Ringtheorie RT mit Bereich R gibt, sodass $(\mathbf{0}, \mathbf{1}, +, \cdot) = (0^{\mathbf{M}}, 1^{\mathbf{M}}, +^{\mathbf{M}}, \cdot^{\mathbf{M}})$.
- Analoge Bemerkungen gelten für Körper.

Sei \mathcal{L} eine Signatur, T eine Menge von \mathcal{L} -Sätzen, σ ein \mathcal{L} -Satz und \mathbf{M} ein Modell von T , d. h.:

$$\mathbf{M} \models T$$

THEOREM 1.31 (KORREKTHEITSSATZ). *Es gilt:*

$$T \vdash \sigma \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \models \sigma$$

Beweis: [HK20, Theorem 3.8 (SOUNDNESS THEOREM), p. 40]

Sei \mathcal{L} eine Signatur, T eine Menge von \mathcal{L} -Sätzen und σ ein \mathcal{L} -Satz.

THEOREM 1.32 (GÖDELSCHER VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ). *Es gilt:*

$$T \not\vdash \sigma \quad \Rightarrow \quad \text{Es gibt ein Modell } M \models T \text{ mit } M \models \neg\sigma$$

Beweis: [HK20, THEOREM 5.5 (GÖDEL'S COMPLETENESS THEOREM), p. 61, and Chapter 15]

Aus dem KORREKTHEITSSATZ 1.31 und dem GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ 1.32 folgt:

KOROLLAR 1.33. *Ein Satz σ ist genau dann aus einer Menge von Sätzen T formal beweisbar, wenn σ in jedem Modell von T gilt.*

Literaturverzeichnis

- [Hal] Lorenz J. Halbeisen, *Grundstrukturen, skript zur vorlesung, 2024, eth zürich.*
- [HK20] Lorenz Halbeisen and Regula Krapf, *Gödel's theorems and Zermelo's axioms—a firm foundation of mathematics*, Birkhäuser/Springer, Cham, 2020. MR 4234598
- [Wag85] Stan Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 24, Cambridge University Press, Cambridge, 1985, With a foreword by Jan Mycielski. MR 803509