Einige (Teil-)Aufgaben sind mit $(*)$ markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

In dieser Serie wiederholen wir aussagenlogische Begriffe, die Sie in Analysis 1 kennengelernt haben, sowie Quantoren.

0.1. wenn, (entweder) oder, es gibt, für jedes

(i) Für welche natürliche Zahlen n ist die folgende Aussage wahr:

"Wenn n gerade ist, dann ist $n+1$ ungerade."
Lösung. Die Aussage ist für alle natürlichen Zahlen wahr.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(ii) $(*)$ "Wenn 1 gerade ist, dann ist 2 ungerade."
Lösung. 1 ist nicht gerade, also sagt die Aussage auch nicht, dass 2 ungerade ist. Die Aussage ist somit wahr.

(iii) "$1+1=2$ oder 1 ist ungerade."
Lösung. Beide Aussagen sind wahr, also ist auch die Veroderung davon wahr.

(iv) "Entweder ist $1+1=2$ oder 1 ist ungerade."
Lösung. Beide Aussagen sind wahr. Bei entweder oder muss aber genau eine der Aussagen wahr sein. Die Aussage ist daher falsch.

(v) "Für jede natürliche Zahl m gibt es eine natürliche Zahl n, sodass $m \leq n$ gilt."
Lösung. Diese Aussage ist wahr. Egal wie gross wir m wählen, wir können immer eine noch grössere natürliche Zahl n finden.

(vi) "Es gibt eine natürliche Zahl n, sodass für jede natürliche Zahl m gilt, dass $m \leq n$."
Lösung. Falsch. Dies würde bedeuten, dass es eine grösste natürliche Zahl n gibt.

0.2. Verknüpfungen von Aussagen

(a) Wir schreiben $\dot\vee$ für das exklusive Oder, d. h. die logische Verknüpfung *entweder oder*. Schreiben Sie jede der folgenden Aussagen mittels mathematischer Symbole, ohne Wörter. Verwenden Sie das Negationszeichen $\neg$ und die Verknüpfungszeichen $\wedge, \vee, \dot\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$:

a) "Null plus eins ist eins, und null ist grösser als eins."

b) "Null plus eins ist eins, oder null ist kleiner als eins."

c) "Entweder ist null plus eins gleich eins, oder null ist kleiner als eins."

d) "Wenn null grösser als eins ist, dann ist null plus eins gleich null."

e) "Null ist genau dann grösser als eins, wenn null plus eins gleich eins ist."

(b) Bestimmen Sie für jede der obigen Aussagen, ob sie wahr ist.

Lösung.

(a)
a) $0 + 1 = 1 \land 0 > 1$

b) $0 + 1 = 1 \lor 0 < 1$

c) $0 + 1 = 1 \dot{\lor} 0 < 1$

d) $0 > 1 \rightarrow 0 + 1 = 0$

e) $0 > 1 \leftrightarrow 0 + 1 = 1$

(b)
a) Falsch

b) Wahr

c) Falsch

d) Wahr

e) Falsch

0.3. Wahrheitstafeln, logische Äquivalenz

(a) **(∗)** Bestimmen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden verknüpften Aussagen:

$$\neg(P \land Q), \qquad (\neg P) \lor (\neg Q).$$

(b) **(∗)** Wir nennen zwei Aussagen A, B *logisch äquivalent* g.d.w. [1] sie die gleichen Wahrheitstabellen besitzen. In diesem Fall schreiben wir:

$$A \Leftrightarrow B$$

Überprüfen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$\neg(P \land Q) \Leftrightarrow (\neg P) \lor (\neg Q). \tag{1}$$

(c) Bestimmen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden verknüpften Aussagen:

$$\neg(P \lor Q), \qquad (\neg P) \land (\neg Q).$$

[1] genau dann, wenn

(d) Überprüfen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q). \tag{2}$$

Bemerkung: (1,2) sind die de-morganschen Gesetze für Aussagen.

(e) Bestimmen Sie die Wahrheitstafel für die folgende verknüpfte Aussage:

$$(\neg Q) \to \neg P.$$

(f) Überprüfen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$P \to Q \Leftrightarrow (\neg Q) \to \neg P. \tag{3}$$

Bemerkung: *Kontraposition* (oder *Umkehrschluss*) ist die logische Schlussregel, die von der Implikation $P \to Q$ auf ihr Kontraponiertes $(\neg Q) \to \neg P$ schliesst. Diese Regel ist gültig wegen (3).

(g) Bestimmen Sie die Wahrheitstafel für die folgende verknüpfte Aussage:

$$(P \to Q) \wedge (Q \to P).$$

(h) Überprüfen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P).$$

(i) Bestimmen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden verknüpften Aussagen:

$$P \wedge (Q \vee R), \qquad (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

(j) Zeigen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R). \tag{4}$$

Bemerkungen:

- Das ist das *Distributivgesetz* für die Konjunktion $\wedge$ und die Disjunktion $\vee$. Dieses Gesetz ist analog zum Distributivgesetz für die Multiplikation und Addition von Zahlen.
- Bemerkenswerterweise gilt das Distributivgesetz für $\wedge$ und $\vee$ auch umgekehrt, also:

  $$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R). \tag{5}$$

  Dadurch unterscheiden sich die Konjunktion und die Disjunktion von der Multiplikation und Addition von Zahlen.

(k) Gilt

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee R?$$

(l) Überlegen Sie sich, welche mathematischen Interpretationen die alltägliche Äusserung "Für den angegebenen Preis erhalten Sie das Menü und Kaffee oder Kuchen." besitzt. Geben Sie für jede Interpretation die Wahlmöglichkeiten an, die der Kunde/ die Kundin besitzt. Sind die Interpretationen zueinander äquivalent? Welche mathematischen Interpretationen hat die gleiche Äusserung mit "oder" ersetzt durch "entweder ... oder"?

Lösung.

(a)

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	F

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	T
T	F	F	T	T
T	T	F	F	F

(b) Die beiden Wahrheitstafeln haben die selben Einträge. Daher sind die Aussagen $\neg(P \wedge Q)$ und $(\neg P) \vee (\neg Q)$ logisch äquivalent.

(c)

P	Q	$\neg(P \vee Q)$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

P	Q	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

(d) Die beiden Wahrheitstafeln haben die selben Einträge. Daher sind die Aussagen $\neg(P \vee Q)$ und $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ logisch äquivalent.

(e)

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg Q) \to \neg P$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	T
T	F	F	T	F
T	T	F	F	T

(f) Die Wahrheitstafel für $P \to Q$ ist aus der Vorlesung bekannt als

P	Q	$P \to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Durch Vergleichen der Einträge sehen wir, dass $P \to Q$ und $(\neg Q) \to \neg P$ logisch äquivalent sind.

(g)

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	F
T	F	F	T	F
T	T	T	T	T

(h) Die Wahrheitstafel für $P \leftrightarrow Q$ ist aus der Vorlesung bekannt als

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Durch Vergleichen der Einträge sehen wir, dass $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ und $P \leftrightarrow Q$ logisch äquivalent sind.

(i)

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$
F	F	F	F	F
F	F	T	T	F
F	T	F	T	F
F	T	T	T	F
T	F	F	F	F
T	F	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T	T	T

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	T
T	T	F	T	F	T
T	T	T	T	T	T

(j) Die beiden Wahrheitstafeln haben die selben Einträge. Daher sind die Aussagen $P \wedge (Q \vee R)$ und $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ logisch äquivalent.

(k) Nein, da sich die beiden Wahrheitstafeln in der folgenden Zeile unterscheiden:

P	Q	R	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee R$
F	F	T	F	T

Bemerkung: Es spielt bei mit *und*, *oder* verknüpften Aussagen also eine Rolle, wie wir die Klammern setzen.

(l) Es gibt zwei Interpretationen der Äusserung, die sich dadurch unterscheiden, dass Klammern verschieden gesetzt werden. Wir schreiben:

M := "Für den angegebenen Preis erhalten Sie das Menü."

Ka := "Für den angegebenen Preis erhalten Sie Kaffee."

Ku := "Für den angegebenen Preis erhalten Sie Kuchen."

Interpretation A: $M \wedge (Ka \vee Ku)$

Das bedeutet, dass der Kunde/ die Kundin die folgenden Wahlmöglichkeiten hat:

- Menü und Kaffee
- Menü und Kuchen
- Menü und Kaffee und Kuchen

  Bemerkung: Hierbei haben wir verwendet, dass $\vee$ (*oder*) inklusiv ist.

Interpretation B: $(M \wedge Ka) \vee Ku$ Das bedeutet, dass der Kunde/ die Kundin die folgenden Wahlmöglichkeiten hat:

- Menü und Kaffee
- Kuchen

- Menü und Kaffee und Kuchen

  Bemerkung: Hierbei haben wir verwendet, dass $\vee$ (*oder*) inklusiv ist.

Die zweite Wahlmöglichkeit ist also je nach Interpretation verschieden.

Falls wir in der Äusserung das (inklusive) *Oder* durch das *exklusive Oder* (= *entweder ... oder*) ersetzen, dann gibt es die folgenden zwei Interpretationen der Äusserung:

Interpretation A': $M \wedge (Ka \dot{\vee} Ku)$ [2] Das bedeutet, dass der Kunde/ die Kundin die folgenden Wahlmöglichkeiten hat:

- Menü und Kaffee
- Menü und Kuchen

Interpretation B': $(M \wedge Ka) \dot{\vee} Ku$ Das bedeutet, dass der Kunde/ die Kundin die folgenden Wahlmöglichkeiten hat:

- Menü und Kaffee
- Kuchen

Die zweite Wahlmöglichkeit ist also je nach Interpretation verschieden.

In der alltäglichen Äusserung "Für den angegebenen Preis erhalten Sie das Menü und Kaffee oder Kuchen." ist *oder* wohl im ausschliessenden Sinn gemeint, also *entweder ... oder*, $\dot{\vee}$. Die Äusserung ist wohl mit Klammern um *Kaffee oder Kuchen* gemeint. Das ergibt sich aus dem Kontext, da Kaffee und Kuchen oft zusammen eingenommen werden. Das entspricht Interpretation A'.

0.4. Quantoren

(a) Was bedeutet jede der folgenden Aussage? Ist sie wahr (in der üblichen Interpretation der Zeichen)?

1) **(∗)** $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq 1 \vee n > 1$
2) $\forall x \in \mathbb{N} : x \leq 1 \vee x > 1$
3) $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : x \neq \frac{p}{q}$

(b) Schreiben Sie die folgenden Aussagen mittels Quantoren.

1) 24 ist keine Quadratzahl.

[2] Wir schreiben $\dot{\vee}$ für das exklusive Oder.

2) **(∗)** Zu jeder reellen Zahl gibt es eine natürliche Zahl, die grösser als die gegebene Zahl ist.

Bemerkungen:

- 1) und 2) sind wahr.
- 2) ist das *archimedische Prinzip*.

Lösung.

(a) 1) "Jede natürliche Zahl ist kleiner gleich eins oder grösser als eins." Diese Aussage ist wahr.

2) Diese Aussage stimmt mit 1) überein, ausser, dass die Variable jetzt x statt n heisst. 2) ist daher äquivalent zu 1) gemäss dem Goethe-Prinzip *Name ist Schall und Rauch*. 2) ist deshalb wahr.

3) Es existiert eine reelle Zahl, die keine rationale Zahl ist.[3] Diese Aussage ist wahr.

(b) a) $\nexists n \in \mathbb{N} : n^2 = 24$.

b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$

0.5. Quantoren und Negation Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie wahr ist (in der üblichen Interpretation der Zeichen). Formulieren Sie ihre Verneinung mittels Quantoren so um, dass darin keine Negation $\neg$ mehr vorkommt. Schreiben Sie die verneinte Aussage in Wörtern ohne mathematische Zeichen auf.

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : n < n^2$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq 1 \vee n > 1$

(c) **(∗)** $\forall x \in (0, \infty) \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

(d) $P :\equiv \exists n \in \mathbb{N} \forall x \in (0, \infty) : \frac{1}{n} < x$ (Das Symbol $:\equiv$ bedeutet, dass wir P als die rechte Seite definieren.)

Lösung.

[3] Eine solche Zahl heisst *irrational*.

(a) Negation:

$\exists n \in \mathbb{N} : \neg(n < n^2)$, d. h. $\exists n \in \mathbb{N} : n \geq n^2$

="Es existiert eine natürliche Zahl, die grösser oder gleich ihr Quadrat ist."

Das ist wahr, da für $n = 0$ gilt $0 \geq 0^2$. Die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : n < n^2$ ist daher falsch.

(b) Die Aussage ist wahr. Negation:

$\exists n \in \mathbb{N} : \neg\Big(n \leq 1 \vee n > 1\Big)$, d. h. $\exists n \in \mathbb{N} : n > 1 \wedge n \leq 1$

="Es gibt eine natürliche Zahl, die grösser als eins und kleiner gleich eins ist."

(c) Die Aussage ist wahr. (Das folgt aus dem archimedischen Prinzip. Siehe Aufgabe 2.4.) Negation:

$$\begin{aligned}
\neg\left(\forall x \in (0,\infty) \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x\right) &\leftrightarrow \exists x \in (0,\infty) \neg\left(\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x\right)\\
&\leftrightarrow \exists x \in (0,\infty) \forall n \in \mathbb{N} \neg \frac{1}{n} < x\\
&\leftrightarrow \exists x \in (0,\infty) \forall n \in \mathbb{N} \frac{1}{n} \geq x
\end{aligned}$$

="Es gibt eine positive reelle Zahl, die kleiner oder gleich der Kehrwert jeder von null verschiedenen natürlichen Zahl ist."

(d) Negation:

$$\begin{aligned}
\neg P = \neg &\left(\exists n \in \mathbb{N}\, \forall x \in (0,\infty) : \frac{1}{n} < x\right)\\
&\leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \neg\left(\forall x \in (0,\infty) : \frac{1}{n} < x\right)\\
&\leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, \exists x \in (0,\infty) : \neg \frac{1}{n} < x\\
&\leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, \exists x \in (0,\infty) : \frac{1}{n} \geq x
\end{aligned}$$

="Zu jeder von null verschiedenen natürlichen Zahl gibt es eine positive reelle Zahl, die kleiner oder gleich der Kehrwert der natürlichen Zahl ist."

$\neg P$ ist wahr. Um das zu sehen, betrachten wir zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $x := \frac{1}{n}$. Es folgt, dass P falsch ist.