

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (*) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

1.1. Terme, Präfix- und Infixnotation Seien $\mathcal{L}$ eine Signatur, $x, y, z, v_0, v_1, \dots$ Variablen in $\mathcal{L}$ und c ein Konstantensymbol in $\mathcal{L}$.

- (a) (*) Seien F, G Funktionssymbole in $\mathcal{L}$ mit Stelligkeiten 1, 2. Welche der folgenden Zeichenketten sind (Präfix-)Terme?

$FFx \quad Fxy \quad Gcc \quad FGcx \quad Gx \quad FxGxy \quad GFxFy \quad GGxy$

Geben Sie bei jedem Term an, wie wir ihn mittels der Regeln der Termbildung erhalten.

- (b) Geben Sie die intuitive Bedeutung der Zeichenketten aus der letzten Teilaufgabe an, die Terme sind. Zum Beispiel ist die intuitive Bedeutung des Terms Fx gegeben durch “ $F(x)$ ”, d. h. Anwendung der “Funktion” F auf x .

Bemerkung: Ein Term ist eine Zeichenkette ohne Bedeutung. Wir werden Terme jedoch später im Rahmen der Modelltheorie im obigen Sinn interpretieren.

- (c) (*) Seien F, G, H jetzt Funktionssymbole mit Stelligkeit 2. Schreiben Sie die folgenden Präfixterme in Infixform:

$GFxyz \quad HFxyGxy$

Hinweise:

- Denken Sie sich F, G als $+, \cdot$ (Addition, Multiplikation).
- Vergessen Sie die Klammern nicht.

- (d) Schreiben Sie die folgenden Infixterme in Präfixform:

$(xFy)Gz \quad xG(yFz)$

Lösung.

- (a,b)
- Nach Regel (T2) ist Fx ein Term und daher ist FFx auch ein Term. Die intuitive Bedeutung ist $F(F(x))$.
 - Da F die Stelligkeit 1 und nicht 2 hat, ist Fxy kein Term.
 - G hat die Stelligkeit 2, und daher ist Gcc ein Term. Die intuitive Bedeutung ist $G(c, c)$.

- Gcx ist ein Term, und daher ist $FGcx$ auch ein Term. Die intuitive Bedeutung ist $F(G(c, x))$.
- Da G die Stelligkeit 2 hat, ist Gx kein Term.
- Sowohl Fx als auch Gxy sind Terme, aber $FxGxy$ ist kein Term.
- Sowohl Fx als auch Fy sind Terme, und daher ist $GFx Fy$ auch ein Term. Die intuitive Bedeutung ist $G(F(x), F(y))$.
- Da G die Stelligkeit 2 hat, ist Gxy ein Term, aber $GGxy$ ist kein Term.
- (c) • Die intuitive Bedeutung ist $G(F(x, y), z)$ also kann man $(xFy)Gz$ schreiben.
- Die intuitive Bedeutung ist $H(F(x, y), G(x, y))$ also kann man $(xFy)H(xGy)$ schreiben.
- (d) • Wie im vorherigen Beispiel ist die Lösung $GFxyz$.
- Die intuitive Bedeutung ist $G(x, F(y, z))$ also man kann $GxFyz$ schreiben.

1.2. wohlgebildete Formeln, Präfix- und Infixnotation Seien $\mathcal{L}$ eine Signatur, $x, y, z, v_0, v_1, \dots$ Variablen in $\mathcal{L}$, c ein Konstantensymbol in $\mathcal{L}$, F, G Funktionssymbole in $\mathcal{L}$ mit Stelligkeiten 1, 2 und P, R Relationssymbole in $\mathcal{L}$ mit Stelligkeiten 1, 2.

- (a) (*) Welche der folgenden Zeichenketten sind wohlgebildete (Präfix-)Formeln?

$$= cc \quad RFxy \quad RGxy \quad PRxy \quad \neg x \quad \neg Px \quad \wedge xy \quad \wedge PcRxy \\ \rightarrow Pxy \quad \exists xRxy \quad \exists xx \quad \forall y \wedge = yy \vee \exists x = xy \neg = yy$$

Geben Sie bei jeder wohlgebildeten Formel an, wie wir sie mittels der Regeln der Formelbildung erhalten.

- (b) Geben Sie die intuitive Bedeutung der Zeichenketten aus der letzten Teilaufgabe an, die Formeln sind. Zum Beispiel ist die intuitive Bedeutung der Zeichenkette $= Fxy$ gegeben durch " $F(x)$ ist gleich y ".

Bemerkung: Ein Formel ist eine Zeichenkette ohne Bedeutung. Wir werden Formeln jedoch später im Rahmen der Modelltheorie im obigen Sinn interpretieren.

- (c) Schreiben Sie die folgenden Präfixformeln in Infixform¹:

$$\wedge \vee PxPyPz \quad \vee Px \wedge PyPz \quad \forall y \wedge = yy \vee \exists x = xy \neg = yy$$

¹Verwenden Sie die Infixnotation sowohl für die logischen Verknüpfungen $\wedge, \vee, \rightarrow$ als auch für die zweistelligen Relationen. Die Infixnotation für logische Verknüpfungen ist analog zur derjenigen für Terme.

Lösung.

(a,b) Die wohlgebildete Formeln sind:

- $= cc$, mit intuitive Bedeutung “ c ist gleich c ”.
- $RFxy$, mit intuitive Bedeutung “ $F(x)$ und y sind durch R verbunden”.
- $\neg Px$, mit intuitive Bedeutung “nicht $P(x)$ ”.
- $\wedge PcRxy$, mit intuitive Bedeutung “ $P(c)$ und $R(x, y)$ ”.
- $\exists xRxy$, mit intuitive Bedeutung “Es gibt ein x , so dass $R(x, y)$ ”.
- $\forall y \wedge = yy \vee \exists x = xy \neg = yy$, mit intuitive Bedeutung “Für jedes y , y ist gleich y und es gibt ein x , so dass x ist gleich y oder y ist nicht gleich y .”

- (c)
- $(Px \vee Py) \wedge Pz$
 - $Px \vee (Py \wedge Pz)$
 - $\forall y(y = y) \wedge ((\exists x(x = y)) \vee \neg(y = y))$