

Musterlösung Serie 2

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (*) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0. (Bereich eines Quantors, Gebundenheit und Freiheit einer Variable, Satz) Seien P, R Relationssymbole (in der Signatur $\mathcal{L}$) der Stelligkeiten 1, 2. Tun Sie für jede der unteren Formeln φ das Folgende:

- Bereich jedes Quantors bestimmen
- für jede Variable die Stellen bestimmen, an welchen die Variable gebunden vorkommt
- bestimmen, welcher Quantor die Variable jeweils bindet
- $\text{frei}(\varphi)$ bestimmen. Das ist die Menge aller Variablen, die in φ (an mindestens einer Stelle) frei vorkommen.
- entscheiden, ob φ ein Satz ist

Formeln φ in Präfixform:

$$\exists y Rxy \quad \forall x \exists y Rxy \quad \vee \exists x Px = xy \quad (*) \forall x \vee \exists x Px = xy \quad \rightarrow \exists x Px \forall y Ryy$$

Lösung:

- $\exists y Rxy$: Der Bereich des $\exists y$ ist Rxy .
 - $\forall x \exists y Rxy$: Der Bereich des $\forall x$ ist $\exists y Rxy$, und der Bereich des $\exists y$ ist Rxy .
 - $\vee \exists x Px = xy$: Der Bereich des $\exists x$ ist Px .
 - $\forall x \vee \exists x Px = xy$: Der Bereich des $\forall x$ ist $\vee \exists x Px = xy$, und der Bereich des $\exists x$ ist Px .
 - $\rightarrow \exists x Px \forall y Ryy$: Der Bereich des $\exists x$ ist Px , und der Bereich des $\forall y$ ist Ryy .
- (b,c)
 - $\exists y Rxy$: Die Variable y ist in Rxy durch $\exists y$ gebunden, aber x ist frei.
 - $\forall x \exists y Rxy$: Die Variablen x und y sind in Rxy durch $\forall x$ und $\exists y$ jeweils gebunden.
 - $\vee \exists x Px = xy$: Die Variable x ist in Px durch $\exists x$ gebunden aber in $= xy$ frei. Die Variable y ist immer frei.
 - $\forall x \vee \exists x Px = xy$: Die Variable x ist in Px (durch $\exists x$) und $= xy$ (durch $\forall x$) gebunden.
 - $\rightarrow \exists x Px \forall y Ryy$: Die Variable x ist in Px durch $\exists x$ gebunden. Die Variable y ist in Ryy durch $\forall y$ gebunden.
- (d,e)
 - $\text{frei}(\exists y Rxy) = \{x\}$, also ist sie keinen Satz.
 - $\text{frei}(\forall x \exists y Rxy) = \emptyset$, also ist sie einen Satz.
 - $\text{frei}(\vee \exists x Px = xy) = \{x, y\}$, also ist sie keinen Satz.
 - $\text{frei}(\forall x \vee \exists x Px = xy) = \{y\}$, also ist sie keinen Satz.
 - $\text{frei}(\rightarrow \exists x Px \forall y Ryy) = \emptyset$, also ist sie einen Satz.

1. (Substitution, Zulässigkeit) Seien c ein Konstantensymbol, F ein Funktionssymbol der Stelligkeit 1 und P, R Relationssymbole der Stelligkeiten 1, 2. Bestimmen Sie für jedes Tripel φ, ν, τ wie unten die Formel $\varphi(\nu/\tau)$, d. h. die Formel, die wir erhalten, indem wir an jeder Stelle, an der ν in der Formel φ frei vorkommt, die Variable ν durch den Term τ ersetzen. Geben Sie an, ob die Substitution zulässig ist. Wir verwenden hier die Infixnotation für die logischen Verknüpfungen und zweistellige Relationssymbole.

φ	ν	τ
xRy	x	c
yRx	x	y
$\forall y Px$	x	y
$\forall y Px$	x	Fx
$\forall x Px$	x	y
$(*) Px \vee \exists x Px$	x	Fx

Lösung:

φ	ν	τ	$\varphi(\nu/\tau)$	zulässig?
xRy	x	c	cRy	ja
yRx	x	y	yRy	ja
$\forall y Px$	x	y	$\forall y Py$	nein
$\forall y Px$	x	Fx	$\forall y PFx$	ja
$\forall x Px$	x	y	$\forall x Px$	ja
$(*) Px \vee \exists x Px$	x	Fx	$PFx \vee \exists x Px$	ja

2. (logische Axiome)

- (a) Geben Sie eine Instanz des logischen Axiomenschemas L_3 an.
- (b) Seien x, x', y, y', z Variablen und F ein einstelliges Funktionssymbol. Von welchem logischen Axiomenschema ist jede der folgenden Formeln eine Instanz?
- $(x = y \wedge \forall x \neg x = x) \rightarrow x = y$
 - $x = y \rightarrow (y = x \rightarrow (y = x \wedge x = y))$
 - $\forall z z = y \rightarrow Fx = y$
 - $(*) (x = x' \wedge y = y') \rightarrow (x = y \rightarrow x' = y')$
- (c) Überlegen Sie sich für die Axiomenschemata L_0, L_1, L_5 , dass diese intuitiv allgemein gültigen Aussagen entsprechen. Bestimmen Sie dazu die entsprechenden Wahrheitstabellen.

Lösung:

- (a) $(= xy \wedge = zw) \rightarrow = xy$, zum Beispiel.
- (b)
- L_3
 - L_5
 - L_{10}
 - L_{15}

- (c) • $L_0 : \varphi \vee \neg\varphi$. Jede Aussage ist wahr oder falsch.

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \vee \neg\varphi$
F	F	R
F	R	R
R	F	R
R	R	R

- $L_1 : \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$. Alles impliziert Wahrheit.

φ	ψ	$\psi \rightarrow \varphi$	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
F	F	R	R
F	R	F	R
R	F	R	R
R	R	R	R

- $L_5 : \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\psi \wedge \varphi))$. Jede Aussage impliziert sich selbst und die Wahrheit.

φ	ψ	$\psi \wedge \varphi$	$\psi \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\psi \wedge \varphi))$
F	F	F	R	R
F	R	F	F	R
R	F	F	R	R
R	R	R	R	R

3. Schreiben Sie einen formalen Beweis der Formel ψ aus Φ auf, für jedes der folgenden Paare Φ, ψ :

- (a) $\{\alpha \wedge \beta\}, \alpha$
 (b) $\{\alpha \wedge \beta\}, \beta$
 (c) **(*)** $\{\alpha, \beta\}, \alpha \wedge \beta$
 (d) $\emptyset, \exists x(x = x)$

Lösung:

- (a)

$\varphi_0 :$	$\alpha \wedge \beta$	
$\varphi_1 :$	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$	Instanziierung von L_3
$\varphi_2 :$	α	aus φ_1, φ_0 mit (MP)

- (b)

$\varphi_0 :$	$\alpha \wedge \beta$	
$\varphi_1 :$	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$	Instanziierung von L_4
$\varphi_2 :$	β	aus φ_1, φ_0 mit (MP)

(c)

$\varphi_0 :$	β	
$\varphi_1 :$	$\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$	Instanziierung von L_5
$\varphi_2 :$	$\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$	aus φ_1, φ_0 mit (MP)
$\varphi_3 :$	α	
$\varphi_4 :$	$\alpha \wedge \beta$	aus φ_2, φ_3 mit (MP)

(d)

$\varphi_0 :$	$y = y$	Instanziierung von L_{14}
$\varphi_1 :$	$y = y \rightarrow \exists x x = x$	Instanziierung von L_{11}
$\varphi_2 :$	$\exists x x = x$	aus φ_1, φ_0 mit (MP)

4. Zeigen Sie:

(a) $(*) \varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi$

Tipp: Verwenden Sie 3.

(b) $\vdash \psi \vee \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$

Tipps: Verwenden Sie:

- L_8 mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ so gewählt, dass $\psi \vee \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ eine Teilformel von L_8 ist
- L_7 , (MP) = Modus Ponens

(c) $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

Tipp: Verwenden Sie L_8 mit $\varphi_1 \equiv \neg\varphi$, $\varphi_2 \equiv \neg\neg\varphi$ und $\varphi_3 \equiv \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$.

Lösung:

(a) Wir haben in 3(a) gezeigt, dass $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$, und in 3(b), dass $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$. In 3(c) haben wir $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$ gezeigt, was dasselbe ist wie $\{\varphi, \psi\} \vdash \psi \wedge \varphi$. Die Verkettung der drei Beweise ergibt $\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi$.

(b)

$\varphi_0 :$	$(\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\psi \vee \varphi) \rightarrow (\varphi \vee \psi)))$	Instanziierung von L_8
$\varphi_1 :$	$\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$	Instanziierung von L_7
$\varphi_2 :$	$(\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\psi \vee \varphi) \rightarrow (\varphi \vee \psi))$	aus φ_0, φ_1 mit (MP)
$\varphi_3 :$	$\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$	Instanziierung von L_6
$\varphi_4 :$	$(\psi \vee \varphi) \rightarrow (\varphi \vee \psi)$	aus φ_2, φ_3 mit (MP)
$\varphi_5 :$	$\psi \vee \varphi$	
$\varphi_6 :$	$\varphi \vee \psi$	aus φ_4, φ_5 mit (MP)

(c)

$$\varphi_0 : (\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)) \rightarrow \left((\neg\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)) \rightarrow ((\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)) \right)$$

Instanziierung von L_8

$\varphi_1 :$	$\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$	Instanziierung von L_9
$\varphi_2 :$	$(\neg\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)) \rightarrow ((\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi))$	aus φ_0, φ_1 mit (MP)
$\varphi_3 :$	$\neg\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$	Instanziierung von L_1
$\varphi_4 :$	$(\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$	aus φ_2, φ_3 mit (MP)
$\varphi_5 :$	$\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$	Instanziierung von L_0
$\varphi_6 :$	$\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	aus φ_4, φ_5 mit (MP)

In den Lösungen zu den nachfolgenden Aufgaben werden wir an vielen Stellen das folgende Theorem verwenden, das nächste Woche in der Vorlesung behandelt wird.

THEOREM 1 (DEDUKTIONSTHEOREM (DT)) Sei $\mathcal{L}$ eine Signatur, Φ eine Menge von ($\mathcal{L}$ -)Formeln und ψ eine Formel. Es gilt $\Phi \vdash \psi \rightarrow \varphi$ genau dann, falls $\Phi + \psi \vdash \varphi$.

Hierbei bezeichnet $\Phi + \psi$ die Vereinigung der Menge Φ mit $\{\psi\}$.

5. (Beweis gewisser Äquivalenzen) Seien χ und ξ Formeln. Wir schreiben abkürzend

$$\chi \leftrightarrow \xi$$

für $(\chi \rightarrow \xi) \wedge (\xi \rightarrow \chi)$. Das bedeutet, dass wir in jeder Formel jede Teilformel der Form $(\chi \rightarrow \xi) \wedge (\xi \rightarrow \chi)$ durch $\chi \leftrightarrow \xi$ ersetzen dürfen und umgekehrt. Zeigen Sie das Folgende:

(a) $(*) \vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$

Tipp: Verwenden Sie 4.a, das DEDUKTIONSTHEOREM und 3.c.

(b) $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$

Tipp: 4.b

(c) $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$ (duplex negatio affirmat = Gesetz der doppelten Negation)

Tipps:

- 4.c

Beweis von $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$:

- DEDUKTIONSTHEOREM
- L_9 mit φ ersetzt durch $\neg\varphi$ und $\psi \equiv \varphi$
- L_8 mit $\varphi_1 \equiv \varphi$, $\varphi_2 \equiv \neg\varphi$, $\varphi_3 \equiv \varphi$
- $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ (Beispiel in der Vorlesung)

(d) $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

Tipps für $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$:

- Überlegen Sie sich, dass es genügt, das Folgende zu zeigen:

$$\{\neg\varphi \vee \psi, \varphi\} \vdash \psi$$

Tipps dafür:

- $\varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \psi$
Tipp dafür: $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ (siehe 5.c) und L₉
- L₈ mit $\varphi_1 \equiv \neg\varphi$, $\varphi_2 \equiv \psi$, $\varphi_3 \equiv \psi$ und $\varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \psi$.

Wir definieren

$$\chi := (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$$

Tipps für $\vdash \chi$:

- Zeigen Sie mittels L₇, dass

$$\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\varphi \vee \psi \quad (1)$$

- Zeigen Sie, dass

$$\{\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\varphi \vee \psi \quad (2)$$

- Folgern Sie aus (1), dass $\vdash \varphi \rightarrow \chi$.
- Folgern Sie aus (2), dass $\vdash \neg\varphi \rightarrow \chi$.
- Verwenden Sie L₈ mit $\varphi_1 \equiv \varphi$, $\varphi_2 \equiv \neg\varphi$, $\varphi_3 \equiv \chi$.

(e) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ (Kontraposition)

Tipps:

- Zeigen Sie:

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \quad (3)$$

Tipps dazu:

$$\beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \quad (4)$$

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \quad (5)$$

Verwenden Sie dazu je ein Axiom und das DEDUKTIONSTHEOREM. Kombinieren Sie (4) und (5) für $\alpha \equiv \varphi$, $\beta \equiv \psi$, $\gamma \equiv \neg\neg\psi$. Verwenden Sie (5.c). Das zeigt die Hälfte von (3). Die andere Hälfte folgt aus einem analogen Argument.

- Verwenden Sie (3), 5.d, 5.b, 5.d und 6., um $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ zu zeigen.

(f) $\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$ (ex falso quodlibet = aus Falschem folgt Beliebiges)

Lösung:

- (a) Wir zeigen zuerst, dass $\vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$ mit L₃ bis L₅ äquivalent ist zu $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$ und $\vdash (\psi \wedge \varphi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$. Dabei sei $A := \varphi \wedge \psi$ und $B := \psi \wedge \varphi$. Nun reicht es, zu zeigen $A \leftrightarrow B \vdash A \rightarrow B$ und $A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$

$$\top \ni (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

$$\text{L}_3 \quad ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\text{MP} \quad A \rightarrow B$$

$$\text{L}_4 \quad ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\text{MP} \quad B \rightarrow A,$$

sowie $\{A \rightarrow B, B \rightarrow A\} \vdash A \leftrightarrow B$

$T \ni A \rightarrow B$

$T \ni B \rightarrow A$

$L_5 (B \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)))$

$MP (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

$MP (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$

Wir können nun also davon ausgehen, dass gilt $\vdash (\psi \wedge \varphi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$ und $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$. Aus Symmetriegründen reicht es, wenn wir nur eine der beiden Tautologien (das heisst, wahre Aussagen, die aus der leeren Theorie folgen) nachweisen können. Mit dem DEDUKTIONSTHEOREM ist $\vdash (\psi \wedge \varphi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$ äquivalent zu $\psi \wedge \varphi \vdash \varphi \wedge \psi$ und dies wiederum zu $\{\psi, \varphi\} \vdash \varphi \wedge \psi$ wieder mit L_3 bis L_5 . Nun lässt sich $\{\psi, \varphi\} \vdash \varphi \wedge \psi$ mit L_5 und zweimal MODUS PONENS sehr schnell nachweisen.

- (b) Mit denselben Argumenten wie bei der vorherigen Aufgabe kann man zeigen, dass es im Wesentlichen reicht, wenn wir $\vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \varphi)$ nachweisen können. Wie man Letzteres zeigt, wird nun Schritt für Schritt erläutert:

$L_8 (\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \vee \psi)))$

$L_6 \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

$MP (\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \vee \psi))$

$L_7 \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

$MP (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \varphi)$

- (c) Wie zuvor brauchen wir nur die beiden Tautologien $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ und $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ zu beweisen. Wir zeigen nur die erste Aussage. Der Beweis von $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ findet man im Buch “Gödel’s Theorem and Zermelo’s Axioms” auf Seite 21 (Example 2.2).

$L_9 \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$

$L_8 (\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)) \rightarrow ((\neg\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)) \rightarrow ((\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)))$

$MP (\neg\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)) \rightarrow ((\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi))$

$L_1 \neg\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$

$MP (\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$

$L_0 \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$

$MP \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

- (d) Da die beiden Ausdrücke $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ und $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$ nicht symmetrisch sind, müssen beide gezeigt werden.

Wir beginnen mit dem ersten Teil, der nach zweimaliger Anwendung des DEDUKTIONSTHEOREMS zu $\{\neg\varphi \vee \psi, \varphi\} \vdash \psi$ äquivalent ist. Beachte, dass die folgenden Implikationen, $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ und $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$, Tautologien sind, welche wir bei der nächsten Teilaufgabe und bei Aufgabe 1 (b) beweisen werden. Ausserdem verwenden wir die Tautologie und $\psi \rightarrow \psi$, welche aus L_1 und L_2 folgt (siehe auch Aufgabe 1 (b)). Unter der Verwendung dieser gilt:

$T \ni \varphi$

Taut $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

MP $\neg\neg\varphi$

$L_9 \neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$

MP $\neg\varphi \rightarrow \psi$
 L₈ $(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow \psi))$
 MP $(\psi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow \psi)$
 T $\psi \rightarrow \psi$
 MP $(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow \psi$
 T $\neg\varphi \vee \psi$
 MP ψ

Für den zweiten Teil zeigen wir zuerst $\{\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\varphi \vee \psi$ formal:

T $\neg\varphi$
 L₆ $\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$
 MP $\neg\varphi \vee \psi$

Desweiteren brauchen wir $\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\varphi \vee \psi$ zu zeigen:

T φ
 T $\varphi \rightarrow \psi$
 MP ψ
 L₇ $\psi \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$
 MP $\neg\varphi \vee \psi$

Wenden wir nun das DEDUKTIONSTHEOREM mehrmals auf die letzten beiden Resultate an, dann bekommen wir die Tautologien $\vdash \neg\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi))$ und $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi))$. Definieren wir nun $\chi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$, dann können wir den zweiten Teil wie folgt formal beweisen:

L₈ $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \chi))$
 Taut $\varphi \rightarrow \chi$
 MP $(\neg\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \chi)$
 Taut $\neg\varphi \rightarrow \chi$
 MP $(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \chi$
 L₀ $\varphi \vee \neg\varphi$
 MP χ

- (e) Falls φ und ψ Formeln sind, dann ist $\varphi \Leftrightarrow \psi$, definiert durch $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, eine Äquivalenzrelation. Dies folgt hauptsächlich daraus, dass $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ für jedes φ eine Tautologie ist, “ $\wedge$ ” symmetrisch ist und weil “ $\rightarrow$ ” mit L₁ und L₂ transitiv ist.

Wir können nun die vorherigen Teilaufgaben verwenden und wie folgt vorgehen, um einen formalen Beweis zu finden:

$$\varphi \rightarrow \psi \stackrel{(c)}{\Leftrightarrow} \neg\varphi \vee \psi \stackrel{(b)}{\Leftrightarrow} \psi \vee \neg\varphi \stackrel{(c)}{\Leftrightarrow} \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$$

- (f) Mit dem DEDUKTIONSTHEOREM ist $\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$ äquivalent zu $\{\varphi \wedge \neg\varphi\} \vdash \psi$ und dies können wir wie folgt formal beweisen:

T $\varphi \wedge \neg\varphi$
 L₃ $(\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \varphi$
 MP φ
 L₄ $(\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$

MP $\neg\varphi$
 L₉ $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
 MP $\varphi \rightarrow \psi$
 MP ψ

Bemerkung: Grundsätzlich sollten die formalen Beweise so geschrieben werden wie im Skript der ersten Woche (z.B. sollte auch angegeben werden auf welche Formeln Modus Ponens oder Verallgemeinerung angewandt wird). Wir haben in den Lösungen der Übersichts halber jedoch darauf verzichtet. Auch müsste anstelle der Zeilen mit “Taut” eigentlich die Beweise dieser Tautologien stehen, da diese keine logischen Axiome sind.

6. (Logische Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.) Wir sagen, dass zwei Formeln α, β *logisch äquivalent* sind g. d. w. :

$$\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$$

In diesem Fall schreiben wir:

$$\alpha \Leftrightarrow \beta$$

Zeigen Sie das Folgende:

- (a) Logische Äquivalenz ist symmetrisch, d. h. für alle Formeln α, β gilt:

$$\alpha \Leftrightarrow \beta \quad \text{genau dann, wenn} \quad \beta \Leftrightarrow \alpha$$

Tipp: Aufgabe 3.

- (b) (*) Logische Äquivalenz ist transitiv, d. h. für alle Formeln α, β, γ gilt:

$$\text{Wenn} \quad \alpha \Leftrightarrow \beta \quad \text{und} \quad \beta \Leftrightarrow \gamma, \quad \text{dann} \quad \alpha \Leftrightarrow \gamma$$

Tipp: Aufgabe 3. und DEDUKTIONSTHEOREM

Bemerkung: In der Vorlesung wird gezeigt, dass logische Äquivalenz reflexiv ist. Also ist logische Äquivalenz eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Formeln.

Lösung:

- (a) Die Aussage $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ bedeutet $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$. Wir haben in 4(a) gezeigt, dass $\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi$. Wenn wir $\varphi \equiv \alpha \rightarrow \beta$ und $\psi \equiv \beta \rightarrow \alpha$ verwenden, sehen wir, dass $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \vdash (\beta \rightarrow \alpha) \wedge (\alpha \rightarrow \beta)$. Wenn also $\alpha \Leftrightarrow \beta$, dann ist $\beta \Leftrightarrow \alpha$ mit (MP). Wir haben “ $\alpha \Leftrightarrow \beta$ impliziert $\beta \Leftrightarrow \alpha$ ” bewiesen. Die andere Implikation ergibt sich durch Symmetrie.
- (b) Wir können $\alpha \Leftrightarrow \beta$ und $\beta \Leftrightarrow \gamma$ annehmen, was

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha), \quad \vdash (\beta \rightarrow \gamma) \wedge (\gamma \rightarrow \beta)$$

ergibt. Wir müssen $\vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\gamma \rightarrow \alpha)$ zeigen.

Wir zeigen zuerst $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$. Nach dem (DT) genügt es,

$$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \alpha \rightarrow \gamma$$

zu beweisen. Wiederum genügt es gemäß dem (DT),

$$\{(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma), \alpha\} \vdash \gamma$$

zu beweisen. Der Beweis folgt.

$\varphi_0 :$	$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$	
$\varphi_1 :$	$((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	Instanziierung von L_3
$\varphi_2 :$	$((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	Instanziierung von L_4
$\varphi_3 :$	$\alpha \rightarrow \beta$	aus φ_1, φ_0 mit (MP)
$\varphi_4 :$	$\beta \rightarrow \gamma$	aus φ_2, φ_0 mit (MP)
$\varphi_5 :$	α	
$\varphi_6 :$	β	aus φ_3, φ_5 mit (MP)
$\varphi_7 :$	γ	aus φ_4, φ_6 mit (MP)

Wir haben gezeigt, dass $\alpha \Rightarrow \beta$ und $\beta \Rightarrow \gamma$ impliziert $\alpha \Rightarrow \gamma$. Die andere Implikation ergibt sich durch Symmetrie.

7. (Gleichheitsrelation transitiv) Zeigen Sie, dass die Gleichheitsrelation “=” transitiv ist, d. h. zeigen Sie, dass gilt:

$$\vdash \forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$$

Bemerkung: In der Vorlesung zeigen wir, dass die Gleichheitsrelation auch reflexiv und symmetrisch ist. Sie ist also eine Äquivalenzrelation.

Lösung: Wir zeigen $\{x = y \wedge y = z\} \vdash x = z$:

$\top$	$x = y \wedge y = z$
L_4	$(x = y \wedge y = z) \rightarrow y = z$
MP	$y = z$
L_5	$y = z \rightarrow (x = x \rightarrow (x = x \wedge y = z))$
MP	$x = x \rightarrow (x = x \wedge y = z)$
L_{14}	$x = x$
MP	$x = x \wedge y = z$
L_{15}	$(x = x \wedge y = z) \rightarrow (x = y \rightarrow x = z)$
MP	$x = y \rightarrow x = z$
L_3	$(x = y \wedge y = z) \rightarrow x = y$
MP	$x = y$
MP	$x = z$

Mit dem DEDUKTIONSTHEOREM folgt also

$$\vdash (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z.$$

Nach dreimaliger Anwendungen der VERALLGEMEINERUNGSREGEL haben wir schließlich

$$\vdash \forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z),$$

was zu beweisen war.