Musterlösung Serie 3

SATZ ÜBER LOGISCHE ÄQUIVALENZ, PEANO-ARITHMETIK, GRUPPENTHEORIE, SEMI-FORMALER BEWEIS

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0. Seien $\mathscr{L}$ eine Signatur und φ, ψ $\mathscr{L}$-Formeln. Zeigen Sie das Folgende:

(a) **(∗)** $\vdash \varphi \to \big(\psi \to (\varphi \wedge \psi)\big)$
Bemerkung: Beachten Sie die Reihenfolge in der Konjunktion $\varphi \wedge \psi$.

(b) $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$

Hinweis: Verwenden Sie das Folgende:

- jeweils ein logisches Axiom
- einen Satz aus der Vorlesung
- eine logische Äquivalenz, die in Serie 2 bewiesen wurde
- $\varphi \Leftrightarrow \psi$ g. d. w. $\varphi \vdash \psi$ und $\psi \vdash \varphi$
(Überlegen Sie sich das. Verwenden Sie dazu das DEDUKTIONSTHEOREM.)

Lösung:

(a) Die Formel $\chi :\equiv \varphi \to \big(\psi \to (\varphi \wedge \psi)\big)$ entsteht aus dem logischen Axiom $\mathrm{L}_5 : \varphi \to \big(\psi \to (\psi \wedge \varphi)\big)$, indem wir die Teilformel $\alpha :\equiv \psi \wedge \varphi$ an einer Stelle durch die Formel $\beta :\equiv \varphi \wedge \psi$ ersetzen. Gemäss einer Aufgabe in Serie 2 (Beweis gewisser Äquivalenzen) gilt $\alpha \Leftrightarrow \beta$. Mittels des SATZES ÜBER LOGISCHE ÄQUIVALENZ folgt daraus, dass $\mathrm{L}_5 \Leftrightarrow \chi$. Mittels einer Aufgabe aus Serie 2 (Konjunktion, Existenz) folgt daraus, dass $\vdash \mathrm{L}_5 \to \chi$. Mittels L_5 und des Modus Ponens folgt, daraus, dass $\vdash \chi$, wie behauptet.

(b) Die Formel $\chi : \varphi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$ entsteht aus dem logischen Axiom $\mathrm{L}_1 : \varphi \to (\psi \to \varphi)$, indem wir die Teilformel $\alpha :\equiv \psi \to \varphi$ an einer Stelle durch die Formel $\beta :\equiv \neg\varphi \to \neg\psi$ ersetzen. Gemäss einer Aufgabe in Serie 2 (Beweis gewisser Äquivalenzen) gilt $\alpha \Leftrightarrow \beta$. Mittels des SATZES ÜBER LOGISCHE ÄQUIVALENZ folgt daraus, dass $\mathrm{L}_1 \Leftrightarrow \chi$. Mittels einer Aufgabe aus Serie 2 (Konjunktion, Existenz) folgt daraus, dass $\vdash \mathrm{L}_1 \to \chi$. Mittels L_1 und des Modus Ponens folgt, daraus, dass $\vdash \chi$, wie behauptet.

1. Die Signatur der Peano-Arithmetik ist $\mathscr{L}_{\mathrm{PA}} := \{0, \mathrm{s}, +, \cdot\}$, wobei 0 ein Konstantensymbol und $\mathrm{s}, +, \cdot$ Funktionssymbole der Stelligkeiten $1, 2, 2$ sind. Die Axiome der Peano-Arithmetik PA sind durch das folgende Axiomensystem gegeben. Rechts neben jedem Axiom ist seine intuitive Bedeutung angegeben.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{PA}_0 :\neg\exists x(\mathrm{s}\,x = 0) && \text{(0 ist kein Nachfolger.)}\\
&\mathsf{PA}_1 :\forall x\forall y\big(\mathrm{s}\,x = \mathrm{s}\,y \to x = y\big) && \text{(s ist injektiv.)}\\
&\mathsf{PA}_2 :\forall x(x + 0 = x) && \text{(0 ist rechts-neutral.)}\\
&\mathsf{PA}_3 :\forall x\forall y\big(x + \mathrm{s}\,y = \mathrm{s}(x + y)\big) && \text{(Das definiert mit } \mathsf{PA}_2 \text{ zusammen } +.)\\
&\mathsf{PA}_4 :\forall x(x \cdot 0 = 0) && \text{(Das definiert } x \cdot 0.)\\
&\mathsf{PA}_5 :\forall x\forall y\big(x \cdot \mathrm{s}\,y = (x \cdot y) + x\big) && \text{(Das definiert mit } \mathsf{PA}_4 \text{ zusammen } \cdot.)
\end{aligned}$$

Sei φ eine $\mathscr{L}_{\mathrm{PA}}$-Formel und $\nu \in \operatorname{frei}\varphi$ eine Variable.

$$\mathsf{PA}_6 :\forall x\forall y\Big(\varphi(0) \wedge \forall\nu\big(\varphi(\nu) \to \varphi(\mathrm{s}\,\nu)\big)\Big) \to \forall\nu\varphi(\nu) \qquad \text{(Induktion)}$$

(a) **(∗)** Was bedeutet die folgende $\mathscr{L}_{\mathrm{PA}}$-Formel intuitiv?

$$\mathrm{s}\,0 + \mathrm{s}\,0 = \mathrm{s}\,\mathrm{s}\,0$$

(b) **(∗)** Zeigen Sie mittels eines formalen Beweises:

$$\mathsf{PA} \vdash \mathrm{s}\,0 + \mathrm{s}\,0 = \mathrm{s}\,\mathrm{s}\,0$$

Hinweise:

- Leiten Sie aus PA_3 und zweimal L_{10} (universal instantiation) die folgende Formel her:
$$\chi :\equiv \mathrm{s}\,0 + \mathrm{s}\,0 = \mathrm{s}(\mathrm{s}\,0 + 0)$$
- Leiten Sie aus PA_2, L_{10} und L_{16} die folgende Formel her:
$$\varphi :\equiv \mathrm{s}(\mathrm{s}\,0 + 0) = \mathrm{s}\,\mathrm{s}\,0$$
- Wir definieren $\psi :\equiv \mathrm{s}\,0 + s0 = \mathrm{s}\,0 + s0$. Leiten Sie mittels L_{14} und L_5 die Formel $\psi \wedge \varphi$ her.
- Leiten Sie aus $\psi \wedge \varphi$, L_{15} und χ die Formel $\mathrm{s}\,0 + \mathrm{s}\,0 = \mathrm{s}\,\mathrm{s}\,0$ her.

Lösung:

(a) Intuitiv bedeutet $\mathrm{s}\,0 + \mathrm{s}\,0 = \mathrm{s}\,\mathrm{s}\,0$, dass $1 + 1 = 2$.

(b)

φ_0:	$\forall x \forall y(x + \mathtt{s}y = \mathtt{s}(x + y))$	PA_3
φ_1:	$\forall x \forall y(x + \mathtt{s}y = \mathtt{s}(x + y)) \to \forall y(\mathtt{s}0 + \mathtt{s}y = \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + y))$	L_{10}
φ_2:	$\forall y(\mathtt{s}0 + \mathtt{s}y = \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + y))$	MP (φ_0 & φ_1)
φ_3:	$\forall y(\mathtt{s}0 + \mathtt{s}y = \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + y)) \to \mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + 0)$	L_{10}
φ_4:	$\mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + 0)$	MP (φ_2 & φ_3)
φ_5:	$\forall x(x + 0 = x)$	PA_2
φ_6:	$\forall x(x + 0 = x) \to \mathtt{s}0 + 0 = \mathtt{s}0$	L_{10}
φ_7:	$\mathtt{s}0 + 0 = \mathtt{s}0$	MP (φ_5 & φ_6)
φ_8:	$\mathtt{s}0 + 0 = \mathtt{s}0 \to \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + 0) = \mathtt{ss}0$	L_{16}
φ_9:	$\mathtt{s}(\mathtt{s}0 + 0) = \mathtt{ss}0$	MP (φ_7 & φ_8)
φ_{10}:	$\mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{s}0 + \mathtt{s}0$	L_{14}
φ_{11}:	$\varphi_9 \to (\varphi_{10} \to (\varphi_{10} \wedge \varphi_9))$	L_5
φ_{12}:	$\varphi_{10} \to (\varphi_{10} \wedge \varphi_9)$	MP (φ_{11} & φ_{12})
φ_{13}:	$\varphi_{10} \wedge \varphi_9$	MP (φ_9 & φ_{12})
φ_{14}:	$(\varphi_{10} \wedge \varphi_9) \to (\mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + 0) \to \mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{ss}0)$	L_{15}
φ_{15}:	$\mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{s}(\mathtt{s}0 + 0) \to \mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{ss}0$	MP (φ_{13} & φ_{14})
φ_{16}:	$\mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{ss}0$	MP (φ_4 & φ_{15})

2. (a) Was bedeutet die folgende Formel der PA (Peano-Arithmetik) intuitiv?

$$\forall x\big(x = 0 \ \vee \ \exists y(x = \mathtt{s}y)\big)$$

(b) Zeigen Sie mittels eines formalen Beweises:

$$\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(x = 0 \ \vee \ \exists y(x = \mathtt{s}y)\big)$$

Hinweise:

- Wir definieren $\varphi(x) :\equiv x = 0 \vee \exists y(x = \mathtt{s}y)$. Verwenden Sie Induktion, also PA_6, um die Formel $\forall x \varphi(x)$ herzuleiten.
- Leiten Sie die **Induktionsverankerung** $\varphi(x/0)$ aus $\mathrm{L}_{14}, \mathrm{L}_6$ her.
- **Induktionsschritt** $\forall x\big(\varphi(x) \to \varphi(\mathrm{s}\,x)\big)$: Wir definieren $\psi(y) :\equiv \mathrm{s}\,x = \mathrm{s}\,y$. Leiten Sie aus L_{11} (existential generalization) mit $\nu :\equiv y$, $\tau :\equiv x$, φ ersetzt durch ψ und aus L_{14} die Formel $\exists y \psi(y)$ her.
- Leiten Sie aus $\exists y \psi(y)$ und L_7 die Formel $\varphi(\mathrm{s}\,x)$ her.
- Leiten Sie aus $\varphi(\mathrm{s}\,x)$ und L_1 die Formel $\varphi(x) \to \varphi(\mathrm{s}\,x)$ her.
- Verallgemeinern Sie diese Formel. Leiten Sie aus der Induktionsverankerung, dem verallgemeinerten Induktionsschritt und L_5 die Formel $\varphi(x/0) \wedge \forall x\big(\varphi(x) \to \varphi(\mathrm{s}\,x)\big)$ her.
- Verwenden Sie jetzt PA_6.

Lösung:

(a) Intuitiv bedeutet $\forall x\big(x = 0 \ \vee \ \exists y(x = \mathtt{s}y)\big)$, dass jede natürliche Zahl ungleich null einen Vorgänger besitzt.

(b) Definiere $\varphi(x) :\equiv x = 0 \vee \exists y(x = \mathtt{s}y)$. Der Beweis soll mit Induktion, (also mit PA_6) gemacht werden. Wir zeigen zuerst die Induktionsverankerung $\mathsf{PA} \vdash \varphi(x/0) \equiv 0 = 0 \vee \exists y(0 = \mathtt{s}y)$:

$$\begin{array}{rl}
\mathsf{L}_{14} & 0 = 0 \\
\mathsf{L}_{6} & 0 = 0 \to (0 = 0 \lor \exists y(0 = \mathrm{s}y)) \\
\mathsf{MP} & \underbrace{0 = 0 \lor \exists y(0 = \mathrm{s}y)}_{\varphi(x/0)}
\end{array}$$

Als Nächstes müssen wir den Induktonsschritt $\mathsf{PA} \vdash \forall x(\varphi(x) \to \varphi(\mathrm{s}x))$ nachweisen. Definiere dazu $\psi(y) :\equiv \mathrm{s}x = \mathrm{s}y$ und beachte, dass die Substitution durch x in ψ erlaubt ist:

$$\begin{array}{rl}
\mathsf{L}_{14} & \psi(y/x) \equiv \mathrm{s}x = \mathrm{s}x \\
\mathsf{L}_{11} & \psi(y/x) \to \exists y\psi(y) \\
\mathsf{MP} & \exists y\psi(y) \equiv \exists y(\mathrm{s}x = \mathrm{s}y) \\
\mathsf{L}_{7} & \exists y\psi(y) \to (\mathrm{s}x = 0 \lor \exists y\psi(y)) \\
\mathsf{MP} & \mathrm{s}x = 0 \lor \exists y\psi(y) \\
\mathsf{L}_{1} & \mathrm{s}x = 0 \lor \exists y\psi(y) \to (x = 0 \lor \exists y(x = \mathrm{s}y) \to \mathrm{s}x = 0 \lor \exists y\psi(y)) \\
\mathsf{MP} & \underbrace{x = 0 \lor \exists y(x = \mathrm{s}y)}_{\varphi(x)} \to \underbrace{\mathrm{s}x = 0 \lor \exists y \mathrm{s}x = \mathrm{s}y}_{\varphi(\mathrm{s}x)} \\
\forall x & \chi(x) :\equiv \forall x(\varphi(x) \to \varphi(\mathrm{s}x))
\end{array}$$

Nun müssen wir die Induktionsverankerung und den Induktionsschritt durch die Konjunktion $\land$ verbinden und dann können wir Induktion anwenden und den Satz beweisen:

$$\begin{array}{rl}
\vdash & \varphi(x/0) \equiv 0 = 0 \lor \exists y(0 = \mathrm{s}y) \\
\vdash & \chi(x) \equiv \forall x(\varphi(x) \to \varphi(\mathrm{s}x)) \\
\mathsf{L}_{5} & \chi(x) \to (\varphi(x/0) \to (\varphi(x/0) \land \chi(x))) \\
\mathsf{MP} & \varphi(x/0) \to (\varphi(x/0) \land \chi(x)) \\
\mathsf{MP} & \underbrace{(0 = 0 \lor \exists y(0 = \mathrm{s}y))}_{\varphi(x/0)} \land \underbrace{(\forall x(\varphi(x) \to \varphi(\mathrm{s}x)))}_{\chi(x)} \\
\mathsf{PA}_{6} & (0 = 0 \lor \exists y(0 = \mathrm{s}y)) \land (\forall x(\varphi(x) \to \varphi(\mathrm{s}x))) \to \forall x\varphi(x) \\
\mathsf{MP} & \forall x(\underbrace{x = 0 \lor \exists y(x = \mathrm{s}y)}_{\varphi(x)})
\end{array}$$

3. (Gruppentheorie, Links- und Rechts-Inverse)

(a) Wir schreiben $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}} = \{e, \circ\}$ für die Signatur der Gruppentheorie und GT für das Axiomensystem der Gruppentheorie. Was bedeutet die $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}}$-Formel $\forall u \forall v\big(v \circ u = e \to u \circ v = e\big)$ intuitiv?

(b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathsf{GT} \vdash \forall u \forall v\big(v \circ u = e \to u \circ v = e\big) \tag{1}$$

Hinweise: Behauptungen:

$$\mathsf{GT},\, v \circ u = e \vdash w \circ v = e \to u \circ v = e \tag{2}$$

$$\mathsf{GT},\, \big(w \circ v = e \to u \circ v = e\big) \vdash u \circ v = e \tag{3}$$

Verwenden Sie (2,3), das DEDUKTIONSTHEOREM und zweimal Verallgemeinerung, um (1) zu zeigen.

Beweis der Behauptung (2)**:**

- Zeigen Sie:
$$\mathsf{GT},\, v \circ u = e \vdash v \circ (u \circ v) = v \tag{4}$$
Verwenden und zeigen Sie dazu:
$$\begin{aligned} \mathsf{GT}_0 &\vdash v \circ (u \circ v) = (v \circ u) \circ v \\ v \circ u = e &\vdash (v \circ u = e) \wedge (v = v) \\ (v \circ u = e) \wedge (v = v) &\vdash (v \circ u) \circ v = e \circ v \qquad \text{(Tipp: } L_{16}\text{)} \\ \mathsf{GT}_1 &\vdash e \circ v = v \\ \tau_0 = \tau_1,\, \tau_1 = \tau_2 &\vdash \tau_0 = \tau_2 \end{aligned} \tag{5}$$
Bemerkung: (5) folgt aus der Lösung zu einer Aufgabe in Serie 2 (Gleichheitsrelation transitiv).
- Überlegen Sie sich, dass ein zum Beweis von (4) analoges Argument zeigt, dass gilt:
$$\mathsf{GT},\, w \circ v = e \vdash w \circ \big(v \circ (u \circ v)\big) = u \circ v \tag{6}$$
- Zeigen Sie:
$$v \circ (u \circ v) = v \vdash (w = w) \wedge \big(v \circ (u \circ v) = v\big) \tag{7}$$
$$(w = w) \wedge \big(v \circ (u \circ v) = v\big) \vdash w \circ \big(v \circ (u \circ v)\big) = w \circ v \tag{8}$$
Schliessen Sie aus (4,7,8), dass gilt:
$$\mathsf{GT},\, v \circ u = e \vdash w \circ \big(v \circ (u \circ v)\big) = w \circ v$$
Folgern Sie daraus mittels (6), der Tatsache $\tau_0 = \tau_1 \vdash \tau_1 = \tau_0$ und (5), dass
$$\mathsf{GT},\, v \circ u = e,\, w \circ v = e \vdash u \circ v = e.$$
Folgern Sie daraus die Behauptung (2).

Beweis der Behauptung (3)**:**

- Leiten Sie aus $w \circ v = e \rightarrow u \circ v = e$ mittels Verallgemeinerung und L_{10} (universal instantiation) die Formel $y \circ v = e \rightarrow u \circ v = e$ her.
- Leiten Sie aus $y \circ v = e \rightarrow u \circ v = e$ mittels Verallgemeinerung, L_{13}, GT_2 und L_{10} (universal instantiation) die Formel $u \circ v = e$ her.

Lösung:

(a) Intuitiv besagt diese Formel, dass jedes Links-Inverse v eines Elementes u ein Rechts-Inverses von u ist.

(b) Seien τ_0, τ_1, τ_2 Terme. Ein Argument wie in einem Beispiel in der Vorlesung (Anwendung des DEDUKTIONSTHEOREMS, "=" ist symmetrisch) zeigt, dass gilt:
$$\tau_0 = \tau_1 \vdash \tau_1 = \tau_0 \tag{9}$$
Die Lösung zu einer Aufgabe in Serie 2 (Gleichheitsrelation transitiv) zeigt, dass gilt:
$$\tau_0 = \tau_1,\, \tau_1 = \tau_2 \vdash \tau_0 = \tau_2 \tag{10}$$

Behauptung:

$$\mathsf{GT},\, v \circ u = e \vdash v \circ (u \circ v) = v \tag{11}$$

Beweis der Behauptung: Es gilt:

$$\mathsf{GT}_0 \vdash v \circ (u \circ v) = (v \circ u) \circ v \tag{12}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 : \forall x \forall y \forall z \big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\big) && (\mathsf{GT}_0)\\
&\varphi_1 : \forall x \forall y \forall z \big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\big) \to \forall y \forall z \big(v \circ (y \circ z) = (v \circ y) \circ z\big) &&\\
&\quad \text{(Instanz von } \mathrm{L}_{10}\text{, universal instantiation)} &&\\
&\varphi_2 : \forall y \forall z \big(v \circ (y \circ z) = (v \circ y) \circ z\big) && \text{(MP)}
\end{aligned}$$

Indem wir L_{10} und (MP) nochmals zweimal anwenden, erhalten wir daraus $v \circ (u \circ v) = (v \circ u) \circ v$. (Überprüfen Sie das!) Das zeigt (12).

Eine Instanz von L_{14} ist $v = v$. Mittels einer Aufgabe aus Serie 2 (Konjunktion, Existenz) folgt daraus:

$$v \circ u = e \vdash (v \circ u = e) \wedge (v = v) \tag{13}$$

Es gilt:

$$(v \circ u = e) \wedge (v = v) \vdash (v \circ u) \circ v = e \circ v \tag{14}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 : (v \circ u = e) \wedge (v = v) && \text{(Annahme)}\\
&\varphi_1 : (v \circ u = e) \wedge (v = v) \to (v \circ u) \circ v = e \circ v && (\mathrm{L}_{16})\\
&\varphi_2 : (v \circ u) \circ v = e \circ v && \text{(MP)}
\end{aligned}$$

Aus (13,14) folgt, dass:

$$v \circ u = e \vdash (v \circ u) \circ v = e \circ v \tag{15}$$

Es gilt:

$$\mathsf{GT}_1 \vdash e \circ v = v \tag{16}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 : \forall x (e \circ x = x) && (\mathsf{GT}_1)\\
&\varphi_1 : \forall x (e \circ x = x) \to e \circ v = v && (\mathrm{L}_{10}\text{, universal instantiation})\\
&\varphi_2 : e \circ v = v && \text{(MP)}
\end{aligned}$$

Aus (12,15,16,10) folgt die Behauptung (11).

Behauptung:

$$\mathsf{GT},\, v \circ u = e,\, w \circ v = e \vdash u \circ v = e \tag{17}$$

Beweis der Behauptung: Ein zum Beweis der Behauptung (11) analoger Beweis zeigt, dass gilt:

$$\mathsf{GT},\, w \circ v = e \vdash w \circ \big(v \circ (u \circ v)\big) = u \circ v$$

Mittels (9) folgt daraus, dass gilt:

$$\mathsf{GT},\, w \circ v = e \vdash u \circ v = w \circ \big(v \circ (u \circ v)\big) \tag{18}$$

Eine Instanz von L_{14} ist $w = w$. Mittels einer Aufgabe aus Serie 2 (Konjunktion, Existenz) folgt daraus:

$$v \circ (u \circ v) = v \vdash (w = w) \wedge \big(v \circ (u \circ v) = v\big) \tag{19}$$

Aus L_{16} und dem Modus Ponens erhalten wir:

$$(w = w) \wedge \big(v \circ (u \circ v) = v\big) \vdash w \circ \big(v \circ (u \circ v)\big) = w \circ v \tag{20}$$

Aus (11,19,20) folgt, dass gilt:

$$\mathsf{GT},\, v \circ u = e \vdash w \circ \big(v \circ (u \circ v)\big) = w \circ v$$

Mittels (18,10) folgt daraus die Behauptung (17).

Aus (17) folgt mittels des DEDUKTIONSTHEOREMS, dass gilt:

$$\mathsf{GT},\, v \circ u = e \vdash w \circ v = e \rightarrow u \circ v = e \tag{21}$$

Behauptung:

$$\mathsf{GT},\, \big(w \circ v = e \rightarrow u \circ v = e\big) \vdash u \circ v = e \tag{22}$$

Beweis der Behauptung:

$\varphi_0 : w \circ v = e \rightarrow u \circ v = e$ (Annahme)

$\varphi_1 : \forall w\big(w \circ v = e \rightarrow u \circ v = e\big)$ (φ_0, Verallgemeinerung)

$\varphi_2 : \forall w\big(w \circ v = e \rightarrow u \circ v = e\big) \rightarrow \big(y \circ v = e \rightarrow u \circ v = e\big)$ (L_{10}, universal instantiation)

$\varphi_3 : y \circ v = e \rightarrow u \circ v = e$ (φ_1, φ_2, MP)

$\varphi_4 : \forall y\big(y \circ v = e \rightarrow u \circ v = e\big)$ (φ_3, Verallgemeinerung)

$\varphi_5 : \forall y\big(y \circ v = e \rightarrow u \circ v = e\big) \rightarrow \big(\exists y(y \circ v = e) \rightarrow u \circ v = e\big)$ (Instanziierung von L_{13})

$\varphi_6 : \exists y(y \circ v = e) \rightarrow u \circ v = e$ (φ_4, φ_5, MP)

$\varphi_7 : \forall x \exists y(y \circ x = e)$ (GT_2)

$\varphi_8 : \forall x \exists y(y \circ x = e) \rightarrow \exists y(y \circ v = e)$ (L_{10}, universal instantiation)

$\varphi_9 : \exists y(y \circ v = e)$ (φ_7, φ_8, MP)

$\varphi_{10} : u \circ v = e$ (φ_6, φ_9, MP)

Das beweist (22). Aus (21,22) folgt, dass gilt:

$$\mathsf{GT},\, v \circ u = e \vdash u \circ v = e$$

Mittels des DEDUKTIONSTHEOREMS folgt daraus, dass gilt:

$$\mathsf{GT} \vdash \big(v \circ u = e \rightarrow u \circ v = e\big)$$

Mittels zweimaliger Verallgemeinerung folgt daraus:

$$\mathsf{GT} \vdash \forall u \forall v\big(v \circ u = e \rightarrow u \circ v = e\big)$$

4. Mit einem *semi-formalen Beweis* meinen wir einen formalen Beweis, bei dem wir alle Schritte weggelassen haben, die auf logischen Axiomen beruhen. In einem solchen Beweis führen wir also nur die Schritte durch, die auf den nicht-logischen Axiomen beruhen. Wir verwenden in einem semi-formalen Beweis ausser logischen Symbolen auch die natürliche Sprache. Dabei verwenden wir einen eingeschränkten Wortschatz, der aus Wörtern und Ausdrücken mit präziser und eindeutiger Bedeutung besteht. Ein Beispiel für einen solchen Ausdruck ist *Wir nehmen an, dass* .... (Der Begriff eines *semi-formalen Beweises* ist kein präziser mathematischer Begriff.)

Zeigen Sie mit semi-formalen Beweisen, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) **(∗)** $\mathsf{PA} \vdash \forall x(0 + x = x)$

Hinweis: Verwenden Sie Induktion, d. h. PA_6.

(b) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z\big((x + y) + z = x + (y + z)\big)$

Was besagt diese Formel intuitiv?

(c) $\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(\mathtt{s}0 + x = \mathtt{s}x \ \land \ \mathtt{s}x = x + \mathtt{s}0\big)$

(d) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y(x + y = y + x)$

Was besagt diese Formel intuitiv?

Lösung:

(a) Für den Beweis verwenden wir Induktion über x. Die Induktionsverankerung $0+0 = 0$ folgt aus PA_2. Für den Induktionsschritt können wir nun annehmen, dass $0 + x = x$ für ein x gilt. Nun ist $0 + \mathtt{s}x = \mathtt{s}(0 + x)$ nach PA_3 und mit der Induktionsannahme ist $\mathtt{s}(0 + x) = \mathtt{s}x$. Mit der Transitivität der Gleichheit und dem Induktonsaxiom PA_6 und MODUS PONENS folgt nun die Aussage.

(b) Die Formel $\forall x \forall y \forall z\big((x+y)+z = x+(y+z)\big)$ besagt intuitiv, dass Addition assoziativ ist.

Um **4**.b zu zeigen, zeigen wir zuerst die Formel $\varphi(z) :\equiv (x + y) + z = x + (y + z)$ mit Induktion über z. Wir müssen also die Induktionsverankerung $\varphi(0)$ nachweisen:

$$(x + y) + 0 \overset{\mathsf{PA}_2}{=} x + y \overset{\mathsf{PA}_2}{=} x + (y + 0)$$

Wir nehmen nun an, dass $\varphi(z)$ wahr ist für ein beliebiges, aber fixes z und zeigen, dass dann auch $\varphi(\mathtt{s}z) \equiv (x + y) + \mathtt{s}z = x + (y + \mathtt{s}z)$ wahr ist:

$$\begin{aligned}(x + y) + \mathtt{s}z &\overset{\mathsf{PA}_3}{=} \mathtt{s}((x + y) + z)\\ &\overset{\varphi(z)}{=} \mathtt{s}(x + (y + z))\\ &\overset{\mathsf{PA}_3}{=} x + \mathtt{s}(y + z)\\ &\overset{\mathsf{PA}_3}{=} x + (y + \mathtt{s}z)\end{aligned}$$

Wenden wir nun PA_6 an und danach zweimal die VERALLGEMEINERUNGSREGEL für y und x, dann ist der Satz bewiesen.

(c) Definiere

$$\varphi(x) :\equiv (\underbrace{\mathtt{s}0 + x = \mathtt{s}x}_{\psi_1(x):\equiv} \land \underbrace{\mathtt{s}x = x + \mathtt{s}0}_{\psi_2(x):\equiv})$$

und beweise die Formel mit Induktion über x. Mit Verwendung von L_3, L_4 und MODUS PONENS können wir die beiden Formeln aufspalten zu $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ und mit L_5 und MODUS PONENS wieder zusammenfügen. Es reicht somit, die Induktionsverankerung und den Induktionsschritt für $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ zu zeigen. Wir beginnen mit den Induktionsverankerungen:

$$\psi_1(0) \equiv \mathsf{s}0 + 0 \overset{\mathsf{PA}_2}{=} \mathsf{s}0$$
$$\psi_2(0) \equiv \mathsf{s}0 \overset{4.(a)}{=} 0 + \mathsf{s}0$$

Wir nehmen nun an, dass $\varphi(x)$ und somit auch $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ wahr sind und zeigen zeigen die Induktionsschritte bei beiden Formeln:

$$\psi_1(\mathsf{s}x) : \mathsf{s}0 + \mathsf{s}x \overset{\mathsf{PA}_3}{=} \mathsf{s}(\mathsf{s}0 + x) \overset{\psi_1(x)}{=} \mathsf{s}\mathsf{s}x$$
$$\psi_2(\mathsf{s}x) : \mathsf{s}\mathsf{s}x \overset{\mathsf{PA}_2}{=} \mathsf{s}(\mathsf{s}x + 0) \overset{\mathsf{PA}_3}{=} \mathsf{s}x + \mathsf{s}0$$

Der Satz folgt nun durch Anwendung von PA_6 und MODUS PONENS.

(d) Die Formel $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ besagt intuitiv, dass Addition kommutativ ist.
Um **4**.d zu zeigen, setzen wir $\varphi(y) :\equiv x + y = y + x$. Wir zeigen zuerst die Induktionsvoraussetzung $\varphi(0)$:

$$x + 0 \overset{\mathsf{PA}_2}{=} x \overset{4.(a)}{=} 0 + x$$

Wir nehmen nun an, dass die Induktionsannahme $\varphi(y)$ wahr ist und zeigen, dass daraus $\varphi(\mathsf{s}y)$ folgt:

$$\begin{aligned} x + \mathsf{s}y &\overset{\mathsf{PA}_3}{=} \mathsf{s}(x + y) \\ &\overset{\varphi(y)}{=} \mathsf{s}(y + x) \\ &\overset{4.(c)}{=} \mathsf{s}0 + (y + x) \\ &\overset{4.(b)}{=} (\mathsf{s}0 + y) + x \\ &\overset{4.(c)}{=} \mathsf{s}y + x \end{aligned}$$

Verwende nun PA_6 und MODUS PONENS sowie die VERALLGEMEINERUNGSREGEL für x und daraus folgt der Satz.

5. Zeigen Sie mit semi-formalen Beweisen, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) $\mathsf{PA} \vdash \forall x(0 \cdot x = 0)$

(b) $\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(\mathsf{s}0 \cdot x = x \ \wedge \ x = x \cdot \mathsf{s}0\big)$

(c) Was bedeuten die Formeln unten in **5**.d-**5**.g intuitiv?

(d) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z\big((x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)\big)$

(e) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$

(f) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z\big(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)\big)$

(g) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z\big(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\big)$

Lösung:

(a) Definiere $\varphi(x) :\equiv \mathsf{0} \cdot x = \mathsf{0}$ und zeige die Formel mit Induktion über x. Die Induktionsverankerung $\varphi(\mathsf{0}) \equiv \mathsf{0} \cdot \mathsf{0} = \mathsf{0}$ folgt direkt aus PA_4. Sei nun $\varphi(x)$ wahr, dann folgt der Induktionsschritt direkt aus

$$\mathsf{0} \cdot \mathsf{s}x \overset{\mathsf{PA}_5}{=} \mathsf{0} \cdot x + \mathsf{0} \overset{\mathsf{PA}_2}{=} \mathsf{0} \cdot x \overset{\varphi(x)}{=} \mathsf{0}.$$

Der Satz folgt nun aus PA_6 und MODUS PONENS.

(b) Setze

$$\varphi(x) :\equiv \underbrace{\mathsf{s0} \cdot x = x}_{\psi_1(x):\equiv} \wedge \underbrace{x = x \cdot \mathsf{s0}}_{\psi_2(x):\equiv}$$

und zeige $\varphi(x)$ analog zu Aufgabe 4. (c) mit Induktion über x. Zeige zuerst die Induktionsverankerung $\varphi(\mathsf{0})$:

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathsf{0}) &: \mathsf{s0} \cdot \mathsf{0} \overset{\mathsf{PA}_4}{=} \mathsf{0} \\ \psi_2(\mathsf{0}) &: \mathsf{0} \overset{\mathsf{PA}_4}{=} \mathsf{0} \cdot \mathsf{0} \overset{\mathsf{PA}_2}{=} \mathsf{0} \cdot \mathsf{0} + \mathsf{0} \overset{\mathsf{PA}_5}{=} \mathsf{0} \cdot \mathsf{s0} \end{aligned}$$

Mit L_5 und MODUS PONENS können wir schliesslich $\psi_1(\mathsf{0})$ und $\psi_2(\mathsf{0})$ zu $\varphi(\mathsf{0})$ zusammensetzen. Nehmen wir an, dass die Induktionsannahme $\varphi(x) \equiv \psi_1(x) \wedge \psi_2(x)$ wahr ist, dann können wir mit L_3, L_4 und MODUS PONENS auch annehmen, dass $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ wahr sind. Für den Induktionsschritt müssen wir zeigen, dass $\varphi(\mathsf{s}x)$ wahr ist:

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathsf{s}x) : \mathsf{s0} \cdot \mathsf{s}x &\overset{\mathsf{PA}_5}{=} \mathsf{s0} \cdot x + \mathsf{s0} \\ &\overset{\psi_1(x)}{=} x + \mathsf{s0} \\ &\overset{4.(c)}{=} \mathsf{s}x \\ \psi_2(\mathsf{s}x) : \mathsf{s}x &\overset{\mathsf{PA}_4}{=} \mathsf{s}x \cdot \mathsf{0} + \mathsf{s}x \\ &\overset{\mathsf{PA}_5}{=} \mathsf{s}x \cdot \mathsf{s0} \end{aligned}$$

Mit L_5 und MODUS PONENS lässt sich dass nun zusammensetzen zu $\varphi(\mathsf{s}x) \equiv \psi_1(\mathsf{s}x) \wedge \psi_2(\mathsf{s}x)$. Der Satz folgt nun durch Induktion.

(c)

$\forall x \forall y \forall z\big((x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)\big)$	Rechts-Distributivität
$\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$	Kommutativität der Multiplikation
$\forall x \forall y \forall z\big(x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)\big)$	Links-Distributivität
$\forall x \forall y \forall z\big(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\big)$	Assoziativität der Multiplikation

(d) Definiere $\varphi(z) :\equiv (x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ und zeige diese Formel mit Induktion über z. Wir starten mit dem Induktionsanfang $\varphi(\mathsf{0})$:

$$(x+y) \cdot \mathsf{0} \overset{\mathsf{PA}_4}{=} \mathsf{0} \overset{\mathsf{PA}_2}{=} \mathsf{0} + \mathsf{0} \overset{\mathsf{PA}_4}{=} x \cdot \mathsf{0} + \mathsf{0} \overset{\mathsf{PA}_4}{=} x \cdot \mathsf{0} + y \cdot \mathsf{0}$$

Sei nun $\varphi(z)$ die Induktionsannahmen, dann lässt sich der Induktionsschritt $\varphi(\mathsf{s}z)$ wie folgt zeigen:

$$
\begin{aligned}
(x+y)\cdot \mathtt{s}z &\overset{\mathsf{PA}_5}{=} (x+y)\cdot z + (x+y)\\
&\overset{\varphi(z)}{=} (x\cdot z + y\cdot z) + (x+y)\\
&\overset{4.(b)}{=} x\cdot z + (y\cdot z + (x+y))\\
&\overset{4.(b)}{=} x\cdot z + ((y\cdot z + x) + y)\\
&\overset{4.(d)}{=} x\cdot z + ((x + y\cdot z) + y)\\
&\overset{4.(b)}{=} x\cdot z + (x + (y\cdot z + y))\\
&\overset{\mathsf{PA}_5}{=} x\cdot z + (x + y\cdot \mathtt{s}z)\\
&\overset{4.(b)}{=} (x\cdot z + x) + y\cdot \mathtt{s}z\\
&\overset{\mathsf{PA}_5}{=} x\cdot \mathtt{s}z + y\cdot \mathtt{s}z
\end{aligned}
$$

Der Satz folgt nun mit Induktion über z sowie mit der VERALLGEMEINERUNGSREGEL über y und x.

(e) Setze $\varphi(y) :\equiv x\cdot y = y\cdot x$ und zeige die Formel mit Hilfe von Induktion über y. Die Induktionsverankerung $\varphi(\mathtt{0})$ geht wie folgt: $x\cdot \mathtt{0} \overset{\mathsf{PA}_4}{=} \mathtt{0} \overset{5.(a)}{=} \mathtt{0}\cdot x$. Wir nehmen an, dass $\varphi(y)$ wahr ist und zeigen $\varphi(\mathtt{s}y)$:

$$
\begin{aligned}
x\cdot \mathtt{s}y &\overset{\mathsf{PA}_5}{=} x\cdot y + x\\
&\overset{\varphi(y)}{=} y\cdot x + x\\
&\overset{5.(b)}{=} y\cdot x + \mathtt{s0}\cdot x\\
&\overset{5.(c)}{=} (y + \mathtt{s0})\cdot x\\
&\overset{4.(c)}{=} \mathtt{s}y\cdot x
\end{aligned}
$$

Mit Indutkion über y sowie einmaliger Anwendung der VERALLGEMEINERUNGSREGEL nach x folgt nun der Satz.

(f) Wir zeigen die Formel $\varphi(x,y,z) :\equiv x\cdot(y+z) = (x\cdot y) + (x\cdot z)$ direkt (also ohne Induktion):

$$
\begin{aligned}
x\cdot(y+z) &\overset{5.(d)}{=} (y+z)\cdot x\\
&\overset{5.(c)}{=} y\cdot x + z\cdot x\\
&\overset{5.(d)}{=} x\cdot y + z\cdot x\\
&\overset{5.(d)}{=} x\cdot y + x\cdot z
\end{aligned}
$$

Der Satz folgt nun, wenn man auf die obige Formel dreimal die VERALLGEMEINERUNGSREGEL anwendet für z, y und x.

(g) Definiere $\varphi(z) :\equiv x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$ und zeige die Aussage mit Induktion über z. Beginne mit der Induktionsverankerung $\varphi(\mathtt{0})$:

$$
x\cdot(y\cdot 0) \overset{\mathsf{PA}_4}{=} x\cdot 0 \overset{\mathsf{PA}_4}{=} 0 \overset{\mathsf{PA}_4}{=} (x\cdot y)\cdot 0
$$

Sei nun $\varphi(z)$ die Induktionsannahme, dann lässt sich der Induktionsschritt $\varphi(\mathrm{s}z)$ wie folgt zeigen:

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot \mathrm{s}z) &\overset{\mathsf{PA}_5}{=} x \cdot (y \cdot z + y) \\ &\overset{5.(e)}{=} x \cdot (y \cdot z) + x \cdot y \\ &\overset{\varphi(z)}{=} (x \cdot y) \cdot z + x \cdot y \\ &\overset{\mathsf{PA}_5}{=} (x \cdot y) \cdot \mathrm{s}z \end{aligned}$$

Verwenden wir nun Induktion über z und wenden wir zweimal die VERALLGEMEINERUNGSREGEL an (für y und x), dann resultiert daraus, was wir zeigen wollten.