Musterlösung Serie 4

STRUKTUR, VARIABLENBELEGUNG, INTERPRETATION, MODELL EINER THEORIE

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (∗) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0. ((∗) **Relation**) Relationen treten im Zusammenhang mit Modellen auf, da jede Struktur Relationssymbole auf Relationen abbildet. Wir definieren die binäre Relation $\leqslant$ auf $\mathbb{N} := \{\varepsilon, |, ||, |||, \dots\}$, der Menge der natürlichen Zahlen, als

$$\leqslant := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{ES GIBT EIN } k \text{ IN } \mathbb{N}, \text{ SODASS } km \equiv n.\}.$$

(km ist die Verkettung von k und m.) Für jedes Paar $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ schreiben wir $m \leqslant n$ genau dann, falls $(m,n) \in \leqslant$. Zeigen Sie, dass $\leqslant$ folgende Eigenschaften besitzt:

(a) (Reflexivität) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \leqslant n$.

(b) (Transitivität) Für alle $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ implizieren $\ell \leqslant m$ und $m \leqslant n$, dass $\ell \leqslant n$.

(c) (Antisymmetrie) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ implizieren $m \leqslant n$ und $n \leqslant m$, dass $m \equiv n$.

Bemerkung: Sie dürfen Folgendes ohne Beweis verwenden:

(i) (Assoziativität der Verkettung) Verkettung von (ENDLICHEN) Zeichenketten ist assoziativ, d. h. für alle Zeichenketten u, v, w gilt $(uv)w \equiv u(vw)$.

(ii) (Injektivität des Hinzufügens) Rechtes Hinzufügen eines Symbols s zu einer Zeichenkette ist injektiv, d. h. für alle Zeichenketten v, w und jedes Symbol s impliziert $vs \equiv ws$, dass $v \equiv w$.

(iii) (Induktion[1]) Sei P eine Abbildung, die jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $P(n)$ zuordnet, sodass $P(\varepsilon)$ gilt und für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $P(n)$ die Aussage $P(n|)$ impliziert. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $P(n)$.

Hinweis: Verwenden Sie für Antisymmetrie Induktion mit:

$P(m) :=$"Für jedes $p \in \mathbb{N}$ impliziert $pm \equiv m$, dass $p \equiv \varepsilon$."

Für den Induktionsschritt verwenden Sie (i,ii).

Lösung:

(a) (Reflexivität) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $k \equiv \varepsilon$ gilt $kn \equiv n$. Daher liegt (n,n) in $\leqslant$, d. h., es gilt $n \leqslant n$.

---

[1] Dieses Prinzip wird auch *Meta-Induktion* genannt, um es vom Axiom PA_6 der Peano-Arithmetik zu unterscheiden.

(b) (Transitivität) Seien $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ so, dass $\ell \preccurlyeq m$ und $m \preccurlyeq n$. Dann gibt es $i, j \in \mathbb{N}$, sodass $i\ell \equiv m$ und $jm \equiv n$. Wir definieren $k :\equiv ji$. Es gilt:

$$\begin{aligned} n &\equiv j(i\ell) \\ &\equiv k\ell \qquad \text{(wegen (i), Assoziativität der Verkettung)} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\ell \preccurlyeq n$. Das beweist Transitivität von $\preccurlyeq$.

(c) (Antisymmetrie) Wir definieren

$P(m) :=$"Für jedes $p \in \mathbb{N}$ impliziert $pm \equiv m$, dass $p \equiv \varepsilon$."

Behauptung: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage $P(m)$.

Beweis mit Induktion: Induktionsverankerung: $P(\varepsilon)$: Sei $p \in \mathbb{N}$ so, dass $p\varepsilon \equiv \varepsilon$. Dann gilt $p \equiv p\varepsilon \equiv \varepsilon$, wie gewünscht.

Induktionsschritt: Sei $m \in \mathbb{N}$ so, dass $P(m)$ gilt. Wir zeigen $P(m|)$: Sei $p \in \mathbb{N}$ so, dass

$$p(m|) \equiv m|.$$

Gemäss (i) (Assoziativität der Verkettung) gilt $(pm)| \equiv p(m|) \equiv m|$. Gemäss (ii) (Injektivität des Hinzufügens) folgt daraus, dass $pm \equiv m$. Aus unserer Induktionsannahme $P(m)$ folgt daher, dass $p \equiv \varepsilon$. Es folgt, dass $P(m|)$ gilt. Das schliesst den Induktionsschritt ab.

Mittels (iii) (Induktion) folgt, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Aussage $P(m)$ gilt. Das beweist die Behauptung.

Seien jetzt $m, n \in \mathbb{N}$ so, dass $m \preccurlyeq n$ und $n \preccurlyeq m$. Dann gibt es $i, j \in \mathbb{N}$, sodass $im \equiv n$ und $jn \equiv m$. Es gilt:

$$\begin{aligned} m &\equiv j(im) \\ &\equiv (ji)m \qquad \text{(wegen (i), Assoziativität der Verkettung)} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Behauptung folgt daher, dass $ji \equiv \varepsilon$. Daraus folgt, dass $i \equiv \varepsilon$, also $n \equiv im \equiv m$, wie gewünscht. Das beweist Antisymmetrie von $\preccurlyeq$.

1. (**Struktur**) Erinnerung: Die Signaturen der Gruppen- und Ringtheorie und der Theorie der dichten linearen Ordnungen sind gegeben durch $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}} = \{e, \circ\}$, $\mathscr{L}_{\mathrm{RT}} = \{0, 1, +, \cdot\}$, $\mathscr{L}_{\mathrm{DLO}} = \{<\}$.

(a) **(∗)** Seien $\boldsymbol{e}, \alpha, \beta$ verschiedene Objekte. Geben Sie eine $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$ mit Bereich $A := \{\boldsymbol{e}, \alpha, \beta\}$ an.

(b) Seien $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ zwei verschiedene Objekte. Geben Sie eine $\mathscr{L}_{\mathrm{RT}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$ mit Bereich $A := \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ an.

(c) Seien α, β, γ verschiedene Objekte. Geben Sie eine $\mathscr{L}_{\mathrm{DLO}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$ mit Bereich $A := \{\alpha, \beta, \gamma\}$ an.

Lösung:

(a) Wir definieren die Abbildung $\circ : A^2 = A \times A \to A$ durch folgende Verknüpfungstabelle:

$\circ$	$\boldsymbol{e}$	α	β
$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{e}$	α	β
α	α	β	$\boldsymbol{e}$
β	β	$\boldsymbol{e}$	α

Wir definieren die Abbildung $\mathbf{M}$ auf $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}}$ durch:

$$e^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}(e) :\equiv \boldsymbol{e} \qquad \circ^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}(\circ) :\equiv \circ$$

Das Paar $(A, \mathbf{M})$ ist eine $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}}$-Struktur mit Bereich A.

Bemerkungen:

- Wie wir sehen werden, ist dieses Paar $(A, \mathbf{M})$ sogar ein *Modell der Gruppentheorie* GT.
- Alternativ können wir $e^{\mathbf{M}}$ als ein beliebiges Element von A und $\circ^{\mathbf{M}}$ als eine beliebige Abbildung von A^2 nach A definieren. Dann ist $(A, \mathbf{M})$ noch stets eine $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}}$-Struktur, aber im Allgemeinen kein Modell von GT mehr.

(b) Wir definieren die Abbildungen $+, \cdot : A^2 \to A$ durch folgende Verknüpfungstabellen:

$+$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

$\cdot$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$

Wir definieren die Abbildung $\mathbf{M}$ auf $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}}$ durch:

$$0^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}(0) :\equiv \mathbf{0} \qquad 1^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}(1) :\equiv \mathbf{1} \qquad +^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}(+) :\equiv + \qquad \cdot^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}(\cdot) :\equiv \cdot$$

Das Paar $(A, \mathbf{M})$ ist eine $\mathscr{L}_{\mathrm{RT}}$-Struktur mit Bereich A.

Bemerkungen:

- Wie wir sehen werden, ist dieses Paar $(A, \mathbf{M})$ sogar ein *Modell der Ringtheorie* RT.
- Alternativ können wir $0^{\mathbf{M}}, 1^{\mathbf{M}}$ als beliebige Elemente von A und $+^{\mathbf{M}}, \cdot^{\mathbf{M}}$ als beliebige Abbildungen von A^2 nach A definieren. Dann ist $(A, \mathbf{M})$ noch stets eine $\mathscr{L}_{\mathrm{RT}}$-Struktur, aber im Allgemeinen kein Modell von RT mehr.

(c) Wir definieren

$$< := \{(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\beta, \gamma)\} \subseteq A^2$$

und die Abbildung $\mathbf{M}$ auf $\mathscr{L}_{\mathrm{DLO}}$ durch:

$$<^{\mathbf{M}} :\equiv <$$

Das Paar $(A, \mathbf{M})$ ist eine $\mathscr{L}_{\mathrm{DLO}}$-Struktur. **Bemerkungen:**

- Wie wir sehen werden, ist dieses Paar $(A, \mathbf{M})$ sogar ein *Modell* von $\mathsf{T} := \{\mathsf{DLO}_0, \mathsf{DLO}_1, \mathsf{DLO}_2\}$ (Teiltheorie der Theorie dichten linearen Ordnungen).
- Alternativ können wir $<^{\mathbf{M}}$ als eine beliebige Teilmenge von A^2 definieren. Dann ist $(A, \mathbf{M})$ noch stets eine $\mathscr{L}_{\mathrm{DLO}}$-Struktur, aber im Allgemeinen kein Modell von T mehr.

2. **((∗) Variablenbelegung, Interpretation eines Terms, Gültigkeit einer Formel in einer Interpretation, Ringtheorie)** Betrachten Sie die $\mathscr{L}_{\mathrm{RT}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$, die Sie in **1**.b definiert haben. Wir definieren die Variablenbelegung $j : \{\text{Variable}\} \to A := \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ als die konstante Abbildung

$$j(\nu) :\equiv \mathbf{1}, \qquad \text{für jedes } \nu.$$

Wir betrachten die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$.

(a) Bestimmen Sie folgende Objekte:

$$\mathbf{I}(x+0) \qquad \mathbf{I}(x+y) \qquad \mathbf{I}(x \cdot 1) \qquad \mathbf{I}(x \cdot y)$$

Welche der folgenden Aussagen gelten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) $\mathbf{I} \vDash x = 1$

(c) $\mathbf{I} \vDash x = 1 \wedge y = 0$

(d) $\mathbf{I} \vDash x = y$

(e) $\mathbf{I} \vDash \forall x(x = y)$

(f) $\mathbf{I} \vDash \forall x \forall y(x = y)$

(g) $\mathbf{I} \vDash \exists x(x = y)$

Lösung:

(a)

$$\mathbf{I}(x+0) \equiv \mathbf{I}(x) \boldsymbol{+} \mathbf{I}(0) \equiv j(x) \boldsymbol{+} 0^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{1} \boldsymbol{+} \mathbf{0} \equiv \mathbf{1} \qquad \text{(gemäss der Additionstabelle)}$$
$$\mathbf{I}(x+y) \equiv \mathbf{I}(x) \boldsymbol{+} \mathbf{I}(y) \equiv j(x) \boldsymbol{+} j(y) \equiv \mathbf{1} \boldsymbol{+} \mathbf{1} \equiv \mathbf{0}$$
$$\mathbf{I}(x \cdot 1) \equiv \mathbf{I}(x) \boldsymbol{\cdot} \mathbf{I}(1) \equiv \mathbf{1} \boldsymbol{\cdot} \mathbf{1} \equiv \mathbf{1} \qquad \text{(gemäss der Multiplikationstabelle)}$$
$$\mathbf{I}(x \cdot y) \equiv \mathbf{1} \boldsymbol{\cdot} \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$$

(b) $x = 1$: Es gilt

$$\mathbf{I}(x) \equiv \mathbf{1} \equiv 1^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{I}(1).$$

Gemäss der Definition von $\vDash$ gilt daher:

$$\mathbf{I} \vDash x = 1$$

(c) $x = 1 \wedge y = 0$: Es gilt

$$\mathbf{I}(y) \equiv \mathbf{1} \not\equiv \mathbf{0} \equiv 0^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{I}(0).$$

Gemäss der Definition von $\vDash$ gilt daher *nicht* $\mathbf{I} \vDash y = 0$. Daher gilt *nicht*: $\mathbf{I} \vDash x = 1$ und $\mathbf{I} \vDash y = 0$. Gemäss der Definition von $\vDash$ gilt daher:

$$\mathbf{I} \nvDash x = 1 \wedge y = 0$$

(d) $x = y$: Da $\mathbf{I}(x) \equiv \mathbf{1} \equiv \mathbf{I}(y)$ gilt:

$$\mathbf{I} \vDash x = y$$

(e) $\forall x(x = y)$: Wir definieren $a :\equiv \mathbf{0}$. Es gilt:

$$\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x}(x) \equiv a \equiv \mathbf{0} \not\equiv \mathbf{1} \equiv j(y) \equiv \mathbf{I}\,\tfrac{a}{x}(y)$$

Darum gilt *nicht*, dass $\mathbf{I}\,\frac{a}{x} \vDash x = y$. Es gilt daher *nicht* für jedes $a \in A$, dass $\mathbf{I}\,\frac{a}{x} \vDash x = y$. Gemäss der Definition von $\vDash$ gilt daher:

$$\mathbf{I} \nvDash \forall x(x = y)$$

(f) $\forall x \forall y(x = y)$:
Bemerkung: Seien $\mathscr{L}$ eine Signatur, $(A, \mathbf{M})$ eine $\mathscr{L}$-Struktur und φ eine $\mathscr{L}$-Formel. Dann gilt:

$$\mathbf{I} \vDash \forall x \forall y \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Für alle } a, b \in A \text{ gilt } (\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x})\tfrac{b}{y} \vDash \varphi. \tag{1}$$

Das folgt aus der Definition von $\vDash$.
Wir definieren $a :\equiv \mathbf{0}$, $b :\equiv \mathbf{1}$. Es gilt:

$$(\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x})\tfrac{b}{y}(x) \equiv \mathbf{I}\,\tfrac{a}{x}(x) \equiv a \equiv \mathbf{0} \not\equiv \mathbf{1} \equiv (\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x})\tfrac{b}{y}(y)$$

Darum gilt:

$$(\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x})\tfrac{b}{y} \nvDash x = y$$

Gemäss (1) gilt daher:

$$\mathbf{I} \nvDash \forall x \forall y(x = y)$$

(g) $\exists x(x = y)$: Wir definieren $a :\equiv \mathbf{1}$. Es gilt:

$$\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x}(x) \equiv a \equiv \mathbf{1} \equiv j(y) \equiv \mathbf{I}\,\tfrac{a}{x}(y)$$

Daraus folgt, dass $\mathbf{I}\,\frac{a}{x} \vDash (x = y)$. Gemäss der Definition von $\vDash$ folgt, dass gilt:

$$\mathbf{I} \vDash \exists x(x = y)$$

3. (**Variablenbelegung**, **Gültigkeit einer Formel in einer Interpretation**, **Theorie der dichten linearen Ordnungen**) Betrachten Sie die $\mathscr{L}_{\mathrm{DLO}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$, die Sie in **1**.c definiert haben. Wir definieren die Variablenbelegung $j : \{\text{Variable}\} \to A := \{\alpha, \beta\}$ als die Abbildung

$$j(\nu) :\equiv \begin{cases} \alpha, & \text{falls } \nu \equiv x, \\ \beta, & \text{falls } \nu \equiv y, \\ \gamma, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir betrachten die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Welche der folgenden Aussagen gelten? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\mathbf{I} \vDash x < y \qquad \mathbf{I} \vDash y < x \qquad \mathbf{I} \vDash \exists x \exists y(y < x)$$

Lösung: Es gilt $(\mathbf{I}(x), \mathbf{I}(y)) \equiv (j(x), j(y)) \equiv (\alpha, \beta) \in \boldsymbol{<} = <^{\mathbf{M}}$. Gemäss der Definition von $\vDash$ gilt daher:

$$\mathbf{I} \vDash x < y$$

Es gilt $(\mathbf{I}(y), \mathbf{I}(x)) \equiv (j(y), j(x)) \equiv (\beta, \alpha) \notin \boldsymbol{<} = <^{\mathbf{M}}$. Gemäss der Definition von $\vDash$ gilt daher:

$$\mathbf{I} \nvDash x < y$$

$\exists x \exists y(y < x)$: Wir definieren $a :\equiv \beta$, $b :\equiv \alpha$. Es gilt

$$\Big((\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x})\tfrac{b}{y}(y), (\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x})\tfrac{b}{y}(x)\Big) \equiv (\alpha, \beta) \in \boldsymbol{<} = <^{\mathbf{M}}$$

und daher

$$(\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x})\tfrac{b}{y} \vDash y < x. \tag{2}$$

Es gibt also ein b (nämlich $b \equiv \alpha$), sodass (2) gilt. Gemäss der Definition von $\models$ gilt daher

$$\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x} \models \exists y(y < x). \tag{3}$$

Es gibt also ein a (nämlich $a \equiv \beta$), sodass (3) gilt. Gemäss der Definition von $\models$ gilt daher

$$\mathbf{I} \models \exists x \exists y(y < x).$$

4. (**Modell**) In dieser Aufgabe verwenden wir den Begriff eines Modells. Dieser ist wie folgt definiert. Sei $\mathscr{L}$ eine Signatur und $\mathbf{M} = (A, \mathbf{M})$ eine $\mathscr{L}$-Struktur.

DEFINITION 1 (Modell)

- *Sei φ eine $\mathscr{L}$-Formel. Wir nennen $\mathbf{M}$ ein* Modell von φ *g. d. w. für jede Variablenbelegung j in $\mathbf{M}$ gilt*

$$I := (\mathbf{M}, j) \models \varphi.$$

Wir schreiben:

$$\mathbf{M} \models \varphi \qquad :\Leftrightarrow \qquad \mathbf{M} \textit{ ist ein Modell von } \varphi.$$

- *Sei Φ eine Menge von $\mathscr{L}$-Formeln. Wir nennen $\mathbf{M}$ ein* Modell von Φ *g. d. w. $\mathbf{M}$ ein Modell jeder Formel in Φ ist. Wir schreiben:*

$$\mathbf{M} \models \Phi \qquad :\Leftrightarrow \qquad \mathbf{M} \textit{ ist ein Modell von } \Phi.$$

Seien $\boldsymbol{e}, \alpha, \beta$ verschiedene Objekte.

(a) ((∗) **Gruppentheorie**) Wir betrachten die Signatur der Gruppentheorie, $\mathscr{L} := \mathscr{L}_{\mathrm{GT}} = \{e, \circ\}$. Wir definieren den Bereich $A := \{\boldsymbol{e}, \alpha, \beta\}$ und die Abbildung $\bullet : A^2 = A \times A \to A$ durch folgende Verknüpfungstabelle:

$\bullet$	$\boldsymbol{e}$	α	β
$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{e}$	α	β
α	α	β	$\boldsymbol{e}$
β	β	$\boldsymbol{e}$	α

Wir definieren die Abbildung $\mathbf{M}$ auf $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}}$ durch:

$$e^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}(e) :\equiv \boldsymbol{e} \qquad \circ^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}(\circ) :\equiv \bullet$$

Zeigen Sie, dass $(A, \mathbf{M})$ ein Modell der Gruppentheorie ist.

Bemerkung: Für jede $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$ gilt $\mathbf{M} \models \mathsf{GT}$ genau dann, wenn das Tripel $(A, e^{\mathbf{M}}, \circ^{\mathbf{M}})$ eine Gruppe ist. Das Tripel $(A, \boldsymbol{e}, \bullet)$ aus dieser Aufgabe ist also eine Gruppe.

Hinweise:

- Zeigen Sie $\mathbf{M} \models \mathsf{GT}_i$ in der Reihenfolge $i = 1, 0, 2$.
- $\mathbf{M} \models \mathsf{GT}_1 :\equiv \forall x(e \circ x = x)$: Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$.
  - Sei $a \in A$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x}(e \circ x) \equiv \mathbf{I}\,\tfrac{a}{x}(x)$. Verwenden Sie dazu, dass $\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x}(e) \equiv e^{\mathbf{M}} \equiv \boldsymbol{e}$, sowie die $\boldsymbol{e}$-Zeile[2] der Verknüpfungstabelle.

[2]Für jedes Symbol s in der Kopfspalte (= Spalte ganz links) meinen wir mit *s-Zeile* die Zeile der Tabelle, welche die Kopfspalte in der Zelle mit dem Symbol s schneidet.

– Folgern Sie, dass $\mathbf{I} \models \forall x(e \circ x = x) \equiv \mathsf{GT}_1$.

Bemerkung: $\mathrm{M} \models \forall x(e \circ x = x)$ ist äquivalent dazu, dass für jedes $a \in A$ gilt: $\boldsymbol{e} \circ a = a$, d. h., $\boldsymbol{e}$ ist links-neutral.

- $\mathrm{M} \models \mathsf{GT}_0 :\equiv \forall x \forall y \forall z\big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\big)$: Sei j eine Variablenbelegung in M. Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Seien $a, b, c \in A$. Wir kürzen ab: $J := \big((\mathbf{I}\,\frac{a}{x})\frac{b}{y}\big)\frac{c}{z}$.

  – Zeigen Sie, dass
$$J\big(x \circ (y \circ z)\big) \equiv J\big((x \circ y) \circ z\big). \tag{4}$$
  Verwenden Sie dazu Folgendes:
$$J(z) \equiv c \qquad J(y) \equiv b \qquad J(x) \equiv a \tag{5}$$
$$a \circ (b \circ c) \equiv (a \circ b) \circ c \qquad \text{für alle } a, b, c \in A \tag{6}$$
  Warum gelten die Identitäten (5)?
  Um (6) zu zeigen, können wir im Prinzip alle Tripel $(a, b, c) \in A^3$ durchgehen und die Verknüpfungstabelle benutzen. Es gibt $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ solche Tripel. Um den Beweis von (6) zu vereinfachen, tun Sie Folgendes: Verwenden Sie, dass $\circ$ in unserem Beispiel kommutativ ist. (Überprüfen Sie das mit Hilfe der Verknüpfungstabelle!) Betrachten Sie folgende Fälle:

  * (Mindestens) eines der drei Elemente a, b, c ist gleich $\boldsymbol{e}$.
  * Keines der drei Elemente ist gleich $\boldsymbol{e}$: Unterfälle:
    $a \equiv c$
    $a \equiv b \not\equiv c$
    $a \not\equiv b \equiv c$: Verwenden Sie den Unterfall $a \equiv b \not\equiv c$.

  – Folgern Sie aus (4), dass $\big((\mathbf{I}\,\frac{a}{x})\frac{b}{y}\big)\frac{c}{z} \models \big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\big)$.

  – Folgern Sie daraus, dass $(\mathbf{I}\,\frac{a}{x})\frac{b}{y} \models \forall z\big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\big)$.

  – Argumentieren Sie analog für die Quantoren $\forall y$ und $\forall x$.

Lösung:

- $\mathrm{M} \models \mathsf{GT}_1 \equiv \forall x(e \circ x = x)$ (e ist links-neutral.): Sei j eine Variablenbelegung in M. Wir definieren die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Sei $a \in A$. Es gilt:
$$\begin{aligned}\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x}(e \circ x) &\equiv \mathbf{I}\,\tfrac{a}{x}(e) \circ^{\mathbf{M}} \mathbf{I}\,\tfrac{a}{x}(x)\\ &\equiv (e^{\mathbf{M}} \equiv \boldsymbol{e}) \circ a\\ &\equiv a \qquad \text{(gemäss der } \boldsymbol{e}\text{-Zeile der Verknüpfungstabelle)}\\ &\equiv \mathbf{I}\,\tfrac{a}{x}(x)\end{aligned}$$
  Gemäss der Definition $\models$ folgt daraus, dass $\mathbf{I}\,\frac{a}{x} \models e \circ x = x$. Da a beliebig ist, folgt daraus mittels der Definition $\models$, dass
$$\mathbf{I} \models \forall x(e \circ x = x) \equiv \mathsf{GT}_1.$$
  Da j beliebig ist, folgt daraus, dass
$$\mathbf{M} \models \mathsf{GT}_1.$$

- $\mathrm{M} \models \mathsf{GT}_0 :\equiv \forall x \forall y \forall z\Big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\Big)$ (Assoziativität von $\circ$):

Bemerkung: $\circ$ ist kommutativ, da die Verknüpfungstabelle symmetrisch ist bzgl. Spiegelung an der (nach rechts unten zeigenden) Diagonale.

Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Seien $a, b, c \in A$. Wir kürzen ab: $J := \big((\mathbf{I}\,\frac{a}{x})\frac{b}{y}\big)\frac{c}{z}$. Es gilt:

$$J(z) \equiv c \qquad J(y) \equiv (\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x})\tfrac{b}{y}(y) \equiv b \qquad J(x) \equiv (\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x})\tfrac{b}{y}(x) \equiv \mathbf{I}\,\tfrac{a}{x}(x) \equiv a \tag{7}$$

Behauptung:

$$a \circ (b \circ c) \equiv (a \circ b) \circ c \qquad \text{für alle } a, b, c \in A \tag{8}$$

Beweis der Behauptung:

Fall: Eines der drei Elemente ist gleich $\boldsymbol{e}$: Es gilt $a \circ (b \circ c) \equiv (a \circ b) \circ c$, da $\boldsymbol{e}$ neutral bzgl. $\circ$ ist und $\circ$ kommutativ ist. Zum Beispiel gilt nämlich $\boldsymbol{e} \circ (b \circ c) \equiv b \circ c \equiv (\boldsymbol{e} \circ b) \circ c$.

Fall: Keines der drei Elemente ist gleich $\boldsymbol{e}$:

Unterfall: $a \equiv c$: Da gemäss obiger Bemerkung $\circ$ kommutativ ist, gilt

$$a \circ (b \circ a) \equiv a \circ (a \circ b) \equiv (a \circ b) \circ a,$$

wie gewünscht.

Unterfall: $a \equiv b \not\equiv c$: Wir können die Gleichheit

$$a \circ (a \circ c) \equiv (a \circ a) \circ c \tag{9}$$

mittels der Verknüpfungstabelle für jedes Paar $a \not\equiv c$ überprüfen. (Tun Sie das exemplarisch für $a \equiv \alpha$, $c \equiv \beta$.) Es gibt 2 solche Paare, nämlich (α, β) und (β, α). Für jede der 2 Seiten von (9) müssen wir 2 Multiplikationen in der Tabelle nachschlagen.

Unterfall: $a \not\equiv b \equiv c$: Es gilt:

$$\begin{aligned} a \circ (b \circ b) &\equiv (b \circ b) \circ a && \text{(Kommutativität von } \circ) \\ &\overset{(9)}{\equiv} b \circ (b \circ a) \\ &\equiv (a \circ b) \circ b && \text{(Kommutativität von } \circ), \end{aligned}$$

wie gewünscht.

Die obigen Fälle decken alle Möglichkeiten für das Tripel (a, b, c) ab. Somit haben wir die Behauptung (8) in allen Fällen gezeigt.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
J\big(x \circ (y \circ z)\big) &\equiv J(x) \circ^{\mathbf{M}} J(y \circ z) \\
&\equiv J(x) \circ^{\mathbf{M}} \big(J(y) \circ^{\mathbf{M}} J(z)\big) \\
&\equiv a \mathbin{\mathsf{o}} (b \mathbin{\mathsf{o}} c) \qquad \text{(gemäss (7))} \\
&\equiv (a \mathbin{\mathsf{o}} b) \mathbin{\mathsf{o}} c \qquad \text{(gemäss (8))} \\
&\equiv \big(J(x) \circ^{\mathbf{M}} J(y)\big) \circ^{\mathbf{M}} J(z) \qquad \text{(gemäss (7))} \\
&\equiv J(x \circ y) \circ^{\mathbf{M}} J(z) \\
&\equiv J\big((x \circ y) \circ z\big)
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\big((\mathbf{I}\,\frac{a}{x})\frac{b}{y}\big)\frac{c}{z} = J \vDash x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$. Da c beliebig ist, folgt daraus, dass $(\mathbf{I}\,\frac{a}{x})\frac{b}{y} \vDash \forall z\Big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\Big)$. Da b beliebig ist, folgt daraus, dass $\mathbf{I}\,\frac{a}{x} \vDash \forall y \forall z\Big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\Big)$. Da a beliebig ist, folgt daraus, dass

$$\mathbf{I} \vDash \forall x \forall y \forall z\Big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\Big) \equiv \mathsf{GT}_0.$$

Da j beliebig ist, folgt daraus, dass

$$\mathbf{M} \vDash \mathsf{GT}_0.$$

- $\mathbf{M} \vDash \mathsf{GT}_2 :\equiv \forall x \exists y(y \circ x = e)$ (Jedes Element besitzt ein Links-Inverses.): Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Sei $a \in A$. Falls $a \equiv \boldsymbol{e}$, dann erfüllt gemäss der Verknüpfungstabelle das Element $b :\equiv \boldsymbol{e}$ die Bedingung $b \mathbin{\mathsf{o}} a \equiv \boldsymbol{e}$. Falls $a \equiv \alpha$, dann erfüllt $b :\equiv \beta$ diese Bedingung. Falls $a \equiv \beta$, dann erfüllt $b :\equiv \alpha$ die Bedingung. Es gibt also in jedem Fall ein $b \in A$, sodass $b \mathbin{\mathsf{o}} a \equiv \boldsymbol{e}$.

  Bemerkung: Kurz gesagt besitzt jedes Element von A ein Links-Inverses bzgl. o, da im Tabellenkörper[3] der Verknüpfungstabelle in jeder Spalte ein $\boldsymbol{e}$ steht. (Überlegen Sie sich das!)

  Wir wählen ein b, sodass $b \mathbin{\mathsf{o}} a \equiv \boldsymbol{e}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x})\tfrac{b}{y}(y \circ x) &\equiv (\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x})\tfrac{b}{y}(y) \circ^{\mathbf{M}} (\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x})\tfrac{b}{y}(x) \\
&\equiv b \mathbin{\mathsf{o}} a \\
&\equiv \boldsymbol{e} \\
&\equiv e^{\mathbf{M}}.
\end{aligned}$$

  Daraus folgt, dass $(\mathbf{I}\,\frac{a}{x})\frac{b}{y} \vDash y \circ x = e$. Gemäss der Definition von $\vDash$ gilt darum:

$$\mathbf{I}\,\tfrac{a}{x} \vDash \exists y(y \circ x = e)$$

  Da a beliebig ist, folgt daraus:

$$\mathbf{I} \vDash \forall x \exists y(y \circ x = e) \equiv \mathsf{GT}_2$$

[3] Das ist die Tabelle ohne Kopfzeile, Kopfspalte und die Zelle mit dem Verknüpfungszeichen o.

Somit haben wir gezeigt, dass

$$\mathbf{M} \models \mathsf{GT},$$

d. h., $\mathbf{M}$ ist ein Modell der Gruppentheorie GT.

(b) (**Gruppentheorie**) Finden Sie eine $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$ mit Bereich $A := \{\boldsymbol{e}, \alpha\}$, sodass $\mathbf{M} \not\models \mathsf{GT}$.

Lösung: Wir definieren die Abbildung $\mathbf{M}$ auf $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}}$ durch

$$e^{\mathbf{M}} :\equiv \boldsymbol{e} \qquad \circ^{\mathbf{M}} : A^2 \to A,\ a \circ^{\mathbf{M}} b :\equiv \boldsymbol{e} \text{ für jedes } (a,b) \in A^2$$

Das Paar $(A, \mathbf{M})$ ist kein Modell von GT. Um das zu sehen, wählen wir eine beliebige Variablenbelegung j und definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Es gilt:

$$\mathbf{I}\,\tfrac{\alpha}{x}(e \circ x) \equiv e^{\mathbf{M}} \circ^{\mathbf{M}} \alpha \equiv \boldsymbol{e} \not\equiv \alpha \equiv \mathbf{I}\,\tfrac{\alpha}{x}(x)$$

Daher gilt $\mathbf{I}\,\frac{\alpha}{x} \not\models e \circ x = x$. Die Aussage $\mathbf{I}\,\frac{a}{x} \models e \circ x = x$ gilt also *nicht* für jedes $a \in A$. Daraus folgt, dass

$$\mathbf{I} \not\models \forall x(e \circ x = x) \equiv \mathsf{GT}_1.$$

Daraus folgt, dass $\mathbf{M} \not\models \mathsf{GT}_1$ und daher $\mathbf{M} \not\models \mathsf{GT}$.

(c) (**($*$) Theorie mit leerer Signatur**) Wir betrachten die leere Signatur $\mathscr{L} := \varnothing$ und die Theorie T gegeben durch folgendes Axiom:

$$x = y$$

i. Finden Sie ein Modell von T.
ii. Beschreiben Sie alle Modelle von T.

Lösung:

i. Wir wählen ein Objekt α und definieren $A := \{\alpha\}$ und $\mathbf{M}$ als die leere Abbildung auf $\mathscr{L} = \varnothing$.[4] Das Paar $(A, \mathbf{M})$ ist ein Modell von T, da für jede Variablenbelegung j für $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$ gilt, dass $\mathbf{I}(x) \equiv \alpha \equiv \mathbf{I}(y)$ und daher $\mathbf{I} \models x = y$, d. h. $\mathbf{I} \models \mathsf{T}$.
ii. Eine $\mathscr{L}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$ ist genau dann ein Modell von T, falls A *genau ein* Element besitzt. Die Implikation $\Leftarrow$ haben wir oben bewiesen. Die Implikation $\Rightarrow$ folgt aus den Tatsachen, dass jedes Modell per definitionem *mindestens ein* Element besitzt und dass jede Struktur mit mehr als einem Element kein Modell von T ist. (Warum?)

(d) (**Ringtheorie**) Seien $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ zwei verschiedene Objekte. Finden Sie ein Modell $(A, \mathbf{M})$ der Ringtheorie mit Bereich $A := \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Überlegen Sie sich, dass tatsächlich $\mathbf{M} \models \mathsf{RT}$ gilt.

Bemerkung: Für jede $\mathscr{L}_{\mathrm{RT}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$ gilt $\mathbf{M} \models \mathsf{RT}$ genau dann, wenn das Tupel $\left(A, 0^{\mathbf{M}}, 1^{\mathbf{M}}, +^{\mathbf{M}}, \cdot^{\mathbf{M}}\right)$ ein Ring ist. Das Tupel $\left(A, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot}\right)$ aus dieser Aufgabe ist also ein Ring.

Lösung: Wir definieren $\boldsymbol{+}$ und $\boldsymbol{\cdot}$ durch folgende Verknüpfungstabellen:

$\boldsymbol{+}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

$\boldsymbol{\cdot}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$

[4] Das ist die einzige Abbildung auf $\varnothing$.

Wir definieren die Abbildung M auf $\mathscr{L}_{\mathrm{RT}}$ durch:

$$0^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{0} \qquad 1^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{1} \qquad +^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{+} \qquad \cdot^{\mathbf{M}} :\equiv \boldsymbol{\cdot}$$

Wir können analog zu Aufgabe **4**.a überprüfen, dass in (A, M) jedes Axiom der Ringtheorie gilt. Wir überprüfen exemplarisch, dass gilt:

$$\mathrm{M} \models \mathsf{RT}_0 \equiv \forall x \forall y \forall z \big(x + (y + z) = (x + y) + z\big) \tag{10}$$

Sei j eine Variablenbelegung in M. Wir definieren $I := (\mathrm{M}, j)$. Seien $a, b, c \in A$. Wir kürzen ab: $J := \big((\mathbf{I}\,\frac{a}{x})\frac{b}{y}\big)\frac{c}{z}$.

Behauptung:

$$a \mathbf{+} (b \mathbf{+} c) \equiv (a \mathbf{+} b) \mathbf{+} c \quad \text{für alle } a, b, c \in A. \tag{11}$$

Beweis der Behauptung:

Fall: Eines der drei Elemente ist gleich $\mathbf{0}$. Nehmen wir beispielsweise an, dass $a \equiv \mathbf{0}$. Dann ist $\mathbf{0} \mathbf{+} (b \mathbf{+} c) \equiv b \mathbf{+} c$ und $(\mathbf{0} \mathbf{+} b) \mathbf{+} c \equiv b \mathbf{+} c$, also gilt die Behauptung.

Fall: Alle drei Elemente sind gleich $\mathbf{1}$. Dann ist $(\mathbf{1} \mathbf{+} \mathbf{1}) \mathbf{+} \mathbf{1} \equiv \mathbf{0} \mathbf{+} \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$ und $\mathbf{1} \mathbf{+} (\mathbf{1} \mathbf{+} \mathbf{1}) \equiv \mathbf{1} \mathbf{+} \mathbf{0} \equiv \mathbf{1}$, also gilt die Behauptung.

Es gilt:

$$\begin{aligned} J(x + (y + z)) &\equiv J(x) \mathbf{+} (J(y) \mathbf{+} J(z)) \\ &\equiv a \mathbf{+} (b \mathbf{+} c) \\ &\equiv (a \mathbf{+} b) \mathbf{+} c \qquad \text{(gemäss (11))} \\ &\equiv (J(x) \mathbf{+} J(y)) \mathbf{+} J(z) \\ &\equiv J((x + y) + z). \end{aligned}$$

Von hier aus zeigt dasselbe Argument wie in 4(a), dass (10) gilt.

(e) (**Ringtheorie**) Finden Sie eine $\mathscr{L}_{\mathrm{RT}}$-Struktur (A, M) mit Bereich $A := \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, sodass $\mathrm{M} \not\models \mathsf{RT}$.

Lösung: Wir definieren $0^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{0}$, $1^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{0}$ und $+^{\mathbf{M}}, \cdot^{\mathbf{M}} : A^2 \to A$ als die konstanten Abbildungen $+^{\mathbf{M}}(a, b) :\equiv \mathbf{0}$, $\cdot^{\mathbf{M}}(a, b) :\equiv \mathbf{0}$, für alle $(a, b) \in A^2$. Das Tupel (A, M) ist kein Model der Ringtheorie RT, da $\mathrm{M} \not\models \mathsf{RT}_2$, $\mathrm{M} \not\models \mathsf{RT}_5$. (Warum?)

Bemerkung: Sei M ein Modell von $\mathscr{L}_{\mathrm{RT}}$ mit Bereich $A = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, sodass $0^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{0}$. Dann gilt $1^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{1}$, $+^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{+}$, $\cdot^{\mathbf{M}} \equiv \boldsymbol{\cdot}$. (Überprüfen Sie das!) Es gibt also nur *ein* Modell von $\mathscr{L}_{\mathrm{RT}}$ mit diesem Bereich und mit $0^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{0}$, nämlich das aus Aufgabe **4**.d. Daraus folgt, dass es bis auf Isomorphie nur einen Ring mit zwei Elementen gibt.

(f) (**Teiltheorie von** DLO) Seien α, β, γ verschiedene Objekte. Finden Sie ein Modell (A, M) der Theorie $\mathsf{T} := \{\mathsf{DLO}_0, \mathsf{DLO}_1, \mathsf{DLO}_2\}$ mit Bereich $A := \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Lösung: Wir definieren die Abbildung M auf $\mathscr{L}_{\mathrm{DLO}}$ durch $<^{\mathbf{M}} := \mathrm{M}(<) := \mathbf{<} := \{(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\beta, \gamma)\}$.

$\mathrm{M} \models \mathsf{DLO}_0$ gilt, weil $(\alpha, \alpha) \notin \mathbf{<}$ und $(\beta, \beta) \notin \mathbf{<}$ und $(\gamma, \gamma) \notin \mathbf{<}$, d. h. für jedes $a \in A$ gilt $(a, a) \notin \mathbf{<}$.

$\mathrm{M} \models \mathsf{DLO}_1$: Sei $(a, b, c) \in A^3$, sodass $a \mathbf{<} b$ und $b \mathbf{<} c$. Dann gilt $(a, b, c) \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$ und daher $a \mathbf{<} b$. Daraus folgt, dass $\mathrm{M} \models \mathsf{DLO}_1$.

Auf eine ähnliche Weise können wir zeigen, dass für jedes Paar $(a, b) \in A^2$ gilt: $a \mathbf{<} b$ oder $b \mathbf{<} a$ oder $a \equiv b$. Daher gilt $\mathrm{M} \models \mathsf{DLO}_2$.

(g) (**Teiltheorie von** DLO) Finden Sie ein Modell $(A, \mathbf{M})$ der Theorie $\mathsf{T} := \{\mathsf{DLO}_0, \mathsf{DLO}_1, \mathsf{DLO}_2\}$ mit einem unendlichen Bereich.

Hinweis: Verwenden Sie eine andere Übungsaufgabe.

Bemerkung: Überlegen Sie sich grundsätzlich, dass Ihr gefundenes $(A, \mathbf{M})$ tatsächlich ein Modell von T ist. Es wird *nicht* erwartet, dass Sie das im Detail ausführen.

Lösung: Wir definieren $A := \mathbb{N}$ und $\leqslant$ wie in Aufgabe **0**. und die Relation $<$ auf $\mathbb{N}$ als

$$< := \{(m,n) \in \leqslant \mid m \not\equiv n\}. \tag{12}$$

Wir definieren $\mathbf{M}$ als die Abbildung auf $\mathscr{L}_{\mathrm{DLO}}$ gegeben durch $<^{\mathbf{M}} := <$. Wir können analog zu den Aufgaben **4**.a und **4**.d überprüfen, dass $(\mathbb{N}, \mathbf{M})$ ein Modell von T ist. Zum Beispiel gilt $\mathbf{M} \models \mathsf{DLO}_0 \equiv \forall x \neg (x < x)$, da für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $n < n$ nicht gilt. Es folgt, dass $(\mathbb{N}, \mathbf{M})$ ein Modell von T ist. Sein Bereich $A = \mathbb{N}$ ist eine unendliche Menge.

Bemerkung: Es gilt $\mathbf{M} \not\models \mathsf{DLO}_3$, da zum Beispiel $\mathbf{0} :\equiv \varepsilon < 1 :\equiv |$, es aber kein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathbf{0} < n$ und $n < \mathbf{1}$ gibt. Es gibt auch ein kleinstes Element, nämlich $\mathbf{0}$. Daher gilt $\mathbf{M} \not\models \mathsf{DLO}_4$.

(h) (**Theorie der dichten linearen Ordnungen**) Finden Sie ein Modell $(A, \mathbf{M})$ der Theorie DLO der dichten linearen Ordnungen.

Hinweis: Definieren Sie A als eine gewisse Menge von Zahlen.

Bemerkung: Überlegen Sie sich, dass tatsächlich $\mathbf{M} \models \mathsf{DLO}$ gilt. Sie dürfen dabei grundlegende Eigenschaften von Zahlen verwenden.

Lösung: Wir definieren $\mathbb{N}$ als die Menge der positiven natürlichen Zahlen, $\mathbf{0} :\equiv \varepsilon$, $\mathbf{1} :\equiv |$ und Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ auf $\mathbb{N}$ wie in der Vorlesung (Standardmodell der Peano-Arithmetik). Für $m, n \in \mathbb{N}$ kürzen wir ab:

$$mn :\equiv m \cdot n$$

(mn bedeutet hier also das Produkt von m und n, nicht die Verkettung der Zeichenfolgen.) Wir definieren $\mathbb{N}_{>0} := \mathbb{N} \backslash \{\mathbf{0}\}$,

$$A := \mathbb{Q}_{>0} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$$

(Menge der positiven rationalen Zahlen), $<$ wie in (12) und $\prec$ durch

$$\frac{k}{\ell} \prec \frac{m}{n} \qquad \text{g. d. w.} \qquad kn < \ell m.$$

(Das ist die übliche strikte Ordnung auf $\mathbb{Q}_{>0}$.) Wir definieren die Abbildung $\mathbf{M}$ auf $\mathscr{L}_{\mathrm{DLO}}$ durch

$$<^{\mathbf{M}} := \prec .$$

Wir zeigen, dass $(A, \mathbf{M})$ ein Modell von DLO ist. Aus der Definition von $<$ folgt, dass $\mathbf{M} \models \mathsf{DLO}_0, \mathsf{DLO}_1, \mathsf{DLO}_2$.

- $\mathbf{M} \models \mathsf{DLO}_3$: Seien $r, s \in A = \mathbb{Q}_{>0}$, sodass $r \prec s$. Wir wählen $k, \ell, m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass

$$\frac{k}{\ell} \equiv r, \qquad \frac{m}{n} \equiv s.$$

Es gilt

$$r \equiv \frac{k}{\ell} < \frac{k+m}{\ell+n} < \frac{m}{n} \equiv s.$$

Daraus folgt, dass $\mathrm{M} \models \mathsf{DLO}_3$.

- $\mathrm{M} \models \mathsf{DLO}_4$: Sei $r \in A$. Wir wählen $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass $r \equiv \frac{m}{n}$. Es gilt

$$\frac{m}{n+1} < \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n}$$

Daraus folgt, dass $\mathrm{M} \models \mathsf{DLO}_4$. Wir haben also gezeigt, dass $\mathrm{M} \models \mathsf{DLO}$, d. h. M ist ein Modell für DLO.

(i) ((*) **Peano-Arithmetik**) Wir definieren $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, das Standardmodell der Peano-Arithmetik, wie in der Vorlesung, wobei wir abweichend von der ursprünglichen Definition $\mathrm{s}^{\mathbb{N}}(n) :\equiv n|$ statt $|n$ definieren. (Dadurch vereinfacht sich diese Übungsaufgabe.) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ ein Modell der Peano-Arithmetik ist.

Bemerkungen:

- Sie dürfen **0**.(i,ii,iii) ohne Beweis verwenden.
- Es wird *nicht* erwartet, dass Sie alle Details des Beweises von $\mathbb{N} \models \mathsf{PA}_6$ ausführen. Erklären Sie stattdessen in Worten, warum diese Aussage gilt.

Lösung:

- $\mathbb{N} \models \mathsf{PA}_0$: Wir schreiben in dieser Aufgabe $m +^{\mathbb{N}} n :\equiv m + n :\equiv mn$ für die Verkettung der Zeichenfolgen $m \equiv | \cdots |$ und $n \equiv | \cdots |$ und $\cdot^{\mathbb{N}} := \cdot$ für die Multiplikation auf $\mathbb{N}$. Wir haben $0^{\mathbb{N}} :\equiv \mathbf{0} :\equiv \varepsilon$ definiert. Da ε die leere Zeichenkette ist, gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $s^{\mathbb{N}}(n) \equiv n| \not\equiv \varepsilon$. Daraus folgt, dass $\mathbb{N} \models \mathsf{PA}_0$.
- $\mathbb{N} \models \mathsf{PA}_1$: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ so, dass $m| \equiv n|$. Gemäss 0.(ii) (Injektivität des Hinzufügens) gilt dann $m \equiv n$. Daraus folgt, dass $\mathbb{N} \models \mathsf{PA}_1$. (Überprüfen Sie das!)
- $\mathbb{N} \models \mathsf{PA}_2$ folgt aus: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $n + \mathbf{0} \equiv n\varepsilon = n$.
- $\mathbb{N} \models \mathsf{PA}_3$ folgt aus: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $m(n|) \equiv (mn)|$. Das folgt aus 0.(i) (Assoziativität der Verkettung).
- $\mathbb{N} \models \mathsf{PA}_4$ folgt aus: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \cdot \varepsilon \equiv \varepsilon$ (keine Kopie von n).
- $\mathbb{N} \models \mathsf{PA}_5$ folgt aus: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $m \cdot (n|) \equiv (m \cdot n)m \equiv (m \cdot n) + m$. Wir haben hier eine Kopie von m für jeden Strich in $m|$, d. h. eine Kopie von m für jeden Strich in n und noch eine Kopie von m für den letzten Strich in $n|$.
- $\mathbb{N} \models \mathsf{PA}_6$: Das folgt mittels (Meta-)Induktion. Um das zu sehen, betrachten wir exemplarisch $\nu \equiv x$ und die Formel

$$\varphi :\equiv x + y = y + x. \tag{13}$$

Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbb{N}$. Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbb{N}, j)$. Wir nehmen an, dass gilt:

$$\mathbf{I} \models \varphi(x/0) \wedge \forall x\big(\varphi \to \varphi(x/\mathrm{s}\,x)\big) \equiv 0+y = y+0 \wedge \forall x\big(x+y = y+x \to \mathrm{s}\,x+y = y+\mathrm{s}\,x\big) \tag{14}$$

Wir zeigen, dass dann gilt:

$$\mathbf{I} \models \forall x \varphi \equiv \forall x\big(x + y = y + x\big) \tag{15}$$

Wir definieren $m :\equiv j(y)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir:
$P(n):\ n \mathbf{+} m \equiv m \mathbf{+} n$

Aus (14) und der Definition von $\models$ folgt, dass gilt:

$$\mathbf{I} \models 0{+}y = y{+}0 \text{ und für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \mathbf{I}\,\tfrac{n}{x} \models x{+}y = y{+}x \to \mathrm{s}\,x{+}y = y{+}\mathrm{s}\,x. \tag{16}$$

$\mathbf{I} \models 0 + y = y + 0$ ist äquivalent zu $P(\varepsilon)$.

$\mathbf{I}\,\frac{n}{x} \models x + y = y + x \to \mathrm{s}\,x + y = y + \mathrm{s}\,x$ ist äquivalent zu:
$P(n)$ impliziert $P(n|)$.

(Überlegen Sie sich das!) Aus (16) folgt daher, dass gilt:

$$P(\varepsilon) \qquad \text{und} \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ gilt:} \quad P(n) \text{ impliziert } P(n|).$$

Mittels 0.(iii) (Indukion) folgt daraus, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $P(n)$ gilt. Dass bedeutet, dass (15) gilt. (Überlegen Sie sich das!) Wir haben gezeigt, dass gilt:

$$\mathbf{I} \models \Big(\varphi(x/0) \wedge \forall x\big(\varphi \to \varphi(x/\mathrm{s}\,x)\big)\Big) \to \forall x \varphi$$

Da j beliebig ist, folgt daraus, dass gilt:

$$\mathbb{N} \models \Big(\varphi(x/0) \wedge \forall x\big(\varphi \to \varphi(x/\mathrm{s}\,x)\big)\Big) \to \forall x \varphi$$

Das zeigt $\mathbb{N} \models \mathsf{PA}_6$ im Fall $\nu \equiv x$ und φ gegeben durch (13). Ein ähnliches Argument funktioniert für allgemeine ν und φ. Daher gilt $\mathbb{N} \models \mathsf{PA}_6$. Somit haben wir gezeigt, dass

$$\mathbb{N} \models \mathsf{PA},$$

d. h. $\mathbb{N}$ ist ein Modell für PA.

(j) (**Körpertheorie**) Seien $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \alpha, \beta$ verschiedene Objekte. Wir definieren $A := \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \alpha, \beta\}$ und die Abbildungen $\mathbf{+}, \boldsymbol{\cdot} : A^2 \to A$ durch folgende Tabellen:

$\mathbf{+}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	α	β
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	α	β
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	β	α
α	α	β	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
β	β	α	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

$\boldsymbol{\cdot}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	α	β
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	α	β
α	$\mathbf{0}$	α	β	$\mathbf{1}$
β	$\mathbf{0}$	β	$\mathbf{1}$	α

Wir definieren die Abbildung $\mathbf{M}$ auf $\mathscr{L}_{\mathrm{KT}} = \{0, 1, +, \cdot\}$, der Signatur der Körpertheorie, durch:

$$0^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{M}(0) :\equiv \mathbf{0} \qquad 1^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{M}(1) :\equiv \mathbf{1} \qquad +^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{M}(+) :\equiv \mathbf{+} \qquad \cdot^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{M}(\cdot) :\equiv \boldsymbol{\cdot}$$

Zeigen Sie, dass $(A, \mathbf{M})$ ein Modell von KT ist.

Bemerkungen: Für jede $\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$ gilt $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}$ genau dann, wenn das Tupel $\big(A, 0^{\mathbf{M}}, 1^{\mathbf{M}}, +^{\mathbf{M}}, \cdot^{\mathbf{M}}\big)$ ein Körper ist. Das Tupel $\big(A, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{+}, \boldsymbol{\cdot}\big)$ aus dieser Aufgabe ist also ein Körper.

Hinweise:

- Zeigen Sie $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_i$ in der Reihenfolge $i = 9, 2, 1, 3, 5, 6, 7, 0, 4, 8$. ($i = 0, 4, 8$ sind aufwendig.)
- $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_9 \equiv 0 \neq 1$: Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Zeigen Sie, dass *nicht* $\mathbf{I}(0) \equiv \mathbf{I}(1)$. Folgern Sie daraus, dass $\mathbf{I} \models \neg(0 = 1)$.
  Bemerkung: $\mathbf{M} \models 0 \neq 1$ ist äquivalent dazu, dass $\mathbf{0} \not\equiv \mathbf{1}$.
- $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_2 \equiv \forall x(0 + x = x)$ (Links-Neutralität der Null bzgl. Addition): Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$.
  - Sei $a \in A$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{I}\,\frac{a}{x}(0 + x) \equiv \mathbf{I}\,\frac{a}{x}(x)$. Verwenden Sie dazu, dass $\mathbf{I}\,\frac{a}{x}(0) \equiv 0^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{0}$, sowie die $\mathbf{0}$-Zeile der Additionstabelle.
  - Folgern Sie, dass $\mathbf{I} \models \forall x(0 + x = x) \equiv \mathsf{KT}_2$.

  Bemerkung: $\mathbf{M} \models \forall x(0 + x = x)$ ist äquivalent dazu, dass für jedes $a \in A$ gilt: $\mathbf{0} + a = a$, d. h., $\mathbf{0}$ ist links-neutral.
- $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_1 \equiv \forall y\big(x + y = y + x\big)$ (Kommutativität der Addition): Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Seien $a, b \in A$. Wir kürzen ab: $J := (\mathbf{I}\,\frac{a}{x})\frac{b}{y}$.
  - Zeigen Sie, dass
  $$J(x + y) \equiv J(y + x). \tag{17}$$
  Verwenden Sie dazu Folgendes:
  $J(y) \equiv b$, $J(x) \equiv a$ (Warum?)
  Die Additionstabelle ist symmetrisch bzgl. Spiegelung an der (nach rechts unten zeigenden) Diagonale.
  - Folgern Sie aus (17), dass $(\mathbf{I}\,\frac{a}{x})\frac{b}{y} \models \big(x + y = y + x\big)$.
  - Folgern Sie daraus, dass $\mathbf{I}\,\frac{a}{x} \models \forall y\big(x + y = y + x\big)$.
- Zeigen Sie $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_i$ für die übrigen i auf eine analoge Weise mit Hilfe der Additions- und Multiplikationstabellen.
- $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_0 \equiv \forall x \forall y \forall z\big(x + (y + z) = (x + y) + z\big)$ (Assoziativität der Addition): Seien $a, b, c \in A$. Um $a + (b + c) \equiv (a + b) + c$ zu zeigen, können wir im Prinzip alle Tripel $(a, b, c) \in A^3$ durchgehen. Davon gibt es $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Um den Beweis zu vereinfachen, tun Sie Folgendes: Verwenden Sie, dass Addition kommutativ ist. Betrachten Sie folgende Fälle:
  - (Mindestens) eines der drei Elemente a, b, c ist gleich $\mathbf{0}$.
  - Keines der drei Elemente ist gleich $\mathbf{0}$: Unterfälle:
  $a \equiv c$:
  $a \equiv b \not\equiv c$
  $a \not\equiv b \equiv c$: Verwenden Sie den Unterfall $a \equiv b \not\equiv c$.
  a, b, c sind alle verschieden
- $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_4 \equiv \forall x \forall y \forall z\big(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\big)$ (Assoziativität der Multiplikation): Seien $a, b, c \in A$. Verwenden Sie, dass Multiplikation kommutativ ist. Betrachten Sie folgende Fälle:
  - Eines der drei Elemente a, b, c ist gleich $\mathbf{0}$.
  - Eines der drei Elemente ist gleich $\mathbf{1}$.
  - Keines der drei Elemente ist gleich $\mathbf{0}$ oder $\mathbf{1}$: Unterfälle:
  $a \equiv c$
  $a \equiv b \not\equiv c$
  $a \not\equiv b \equiv c$: Verwenden Sie den Unterfall $a \equiv b \not\equiv c$.

Lösung: Wir zeigen, dass $\mathbf{M} := (A, \mathbf{M})$ die Axiome der Körpertheorie erfüllt:

- $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_9 \equiv 0 \neq 1$ (Null ungleich Eins): Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(0) &\equiv 0^{\mathbf{M}} \\ &\equiv \mathbf{0} \\ &\not\equiv \mathbf{1} \qquad \text{(gemäss unserer Wahl)} \\ &\equiv 1^{\mathbf{M}} \\ &\equiv \mathbf{I}(1), \end{aligned}$$

  also *nicht* $\mathbf{I}(0) \equiv \mathbf{I}(1)$, also *nicht* $\mathbf{I} \models (0 = 1)$, also $\mathbf{I} \models \neg(0 = 1) \equiv \mathsf{KT}_9$. Da j beliebig ist, folgt daraus, dass $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_9$.
- $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_2 \equiv \forall x(0 + x = x)$ (Links-Neutralität der Null bzgl. Addition): Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Sei $a \in A$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\tfrac{a}{x}(0 + x) &\equiv \mathbf{I}\tfrac{a}{x}(0) \mathbin{\boldsymbol{+}} \mathbf{I}\tfrac{a}{x}(x) \\ &\equiv 0^{\mathbf{M}} \mathbin{\boldsymbol{+}} a \\ &\equiv \mathbf{0} \mathbin{\boldsymbol{+}} a \\ &\equiv a \qquad \text{(}\mathbf{0}\text{-Zeile der Additionstabelle)} \\ &\equiv \mathbf{I}\tfrac{a}{x}(x), \end{aligned}$$

  also $\mathbf{I}\frac{a}{x}(0+x) \equiv \mathbf{I}\frac{a}{x}(x)$. Gemäss der Definition von $\models$ folgt daraus, dass $\mathbf{I}\frac{a}{x} \models 0 + x = x$. Da a beliebig ist, folgt daraus gemäss der Definition von $\models$, dass $\mathbf{I} \models \forall x(0 + x = x) \equiv \mathsf{KT}_2$. Da j beliebig ist, folgt daraus, dass $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_2$.
- $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_1 \equiv \forall x \forall y\big(x + y = y + x\big)$ (Kommutativität der Addition): Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Seien $a, b \in A$. Wir kürzen ab: $J := (\mathbf{I}\frac{a}{x})\frac{b}{y}$. Es gilt

$$\begin{aligned} J(x + y) &\equiv J(x) \mathbin{\boldsymbol{+}} J(y) \\ &\equiv \mathbf{I}\tfrac{a}{x}(x) \mathbin{\boldsymbol{+}} b \\ &\equiv a \mathbin{\boldsymbol{+}} b \\ &\equiv b \mathbin{\boldsymbol{+}} a \qquad \text{(Additionstabelle symmetrisch bzgl. Spiegelung an Diagonale)} \\ &\equiv b \mathbin{\boldsymbol{+}} \mathbf{I}\tfrac{a}{x}(x) \\ &\equiv J(y) \mathbin{\boldsymbol{+}} J(x) \\ &\equiv J(y + x), \end{aligned}$$

  also $J(x + y) \equiv J(y + x)$. Gemäss der Definition von $\models$ folgt daraus, dass $(\mathbf{I}\frac{a}{x})\frac{b}{y} = J \models \big(x + y = y + x\big)$. Da b beliebig ist, folgt daraus gemäss der Definition von $\models$, dass $\mathbf{I}\frac{a}{x} \models \forall y\big(x + y = y + x\big)$. Da a beliebig ist, folgt daraus gemäss der Definition von $\models$, dass $\mathbf{I} \models \forall x \forall y\big(x + y = y + x\big) \equiv \mathsf{KT}_1$. Da j beliebig ist, folgt daraus, dass $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_1$.
- $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_3 \equiv \forall x \exists y(y + x = 0)$ (Links-Inverses bzgl. $\boldsymbol{+}$): Gemäss der Additionstabelle ist für jedes $a \in A$ das Element a ein Links-Inverses von a bzgl. $\boldsymbol{+}$. Daraus folgt, dass $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_3$. (Überlegen Sie sich das!)

Bemerkung: Kurz gesagt besitzt jedes Element von A ein Links-Inverses bzgl. $+$, da im Tabellenkörper[5] der Additionstabelle in jeder Spalte eine $\mathbf{0}$ steht. (Überlegen Sie sich das!)

- $\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_5 \equiv \forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$ (Kommutativität der Multiplikation): Das folgt daraus, dass die Multiplikationstabelle symmetrisch bzgl. Spiegelung an der Diagonale ist.
- $\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_6 \equiv \forall x(1 \cdot x = x)$ (Links-Neutralität von $\mathbf{1}$ bzgl. Multiplikation): Das lässt sich an der $\mathbf{1}$-Zeile der Multiplikationstabelle ablesen.
- $\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_7 \equiv \forall x \exists y\big(x \neq 0 \to y \cdot x = 1\big)$ (Links-Inverses bzgl. $\bullet$): Gemäss der Multiplikationstabelle ist $\mathbf{1} \bullet \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$ und daher $\mathbf{1}$ ein Links-Inverses von $\mathbf{1}$. Da $\beta \bullet \alpha \equiv \mathbf{1}$, ist β ein Links-Inverses von α. Da $\alpha \bullet \beta \equiv \mathbf{1}$, ist α ein Links-Inverses von β. Somit besitzt jedes Element ungleich $\mathbf{0}$ ein Links-Inverses. Daraus folgt, dass $\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_7$.
  Bemerkung: Kurz gesagt besitzt jedes Element von A ungleich $\mathbf{0}$ ein Links-Inverses bzgl. $\bullet$, da im Tabellenkörper der Multiplikationstabelle in jeder Spalte eine $\mathbf{1}$ steht, ausser in der $\mathbf{0}$-Spalte[6] (Überlegen Sie sich das!)
- $\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_0 \equiv \forall x \forall y \forall z\big(x + (y + z) = (x + y) + z\big)$ (Assoziativität der Addition): Seien a, b, c Elemente von A.

  Fall: (Mindestens) eines der drei Elemente ist gleich $\mathbf{0}$: Dann gilt $a + (b + c) \equiv (a + b) + c$, da $\mathbf{0}$ neutral bzgl. $+$ ist. Zum Beispiel gilt nämlich $\mathbf{0} + (b + c) \equiv b + c \equiv (\mathbf{0} + b) + c$.

  Fall: Keines der drei Elemente ist gleich $\mathbf{0}$:

  Unterfall: $a \equiv c$: Da gemäss $\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_1$ Addition kommutativ ist, gilt $a + (b + a) \equiv a + (a + b) \equiv (a + b) + a$, wie gewünscht.

  Unterfall: $a \equiv b \not\equiv c$: Wir können die Gleichheit

  $$a + (a + c) \equiv (a + a) + c \tag{18}$$

  mittels der Additionstabelle für jedes Paar $a \not\equiv c$ überprüfen. (Tun Sie das exemplarisch für $a \equiv 1$, $c \equiv \alpha$.) Es gibt $3 \cdot 2 = 6$ solche Paare. Für jede der 2 Seiten von (18) müssen wir 2 Additionen in der Tabelle nachschlagen.

  Unterfall: $a \not\equiv b \equiv c$: Es gilt:

  $$\begin{aligned} a + (b + b) &\equiv (b + b) + a \qquad (\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_1\text{, Kommutativität der Addition}) \\ &\overset{(18)}{\equiv} b + (b + a) \\ &\overset{\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_1}{\equiv} (a + b) + b, \end{aligned}$$

  wie gewünscht.

[5] Das ist die Tabelle ohne Kopfzeile, Kopfspalte und die Zelle mit dem Verknüpfungszeichen $+$.

[6] Für jedes Symbol s in der Kopfzeile (= Zeile ganz oben) meinen wir mit *s-Spalte* die Spalte der Tabelle, welche die Kopfzeile in der Zelle mit dem Symbol s schneidet.

Unterfall: a, b, c sind alle verschieden: Aus der Additionstabelle folgt:

$$1 + (\alpha + \beta) \equiv \mathbf{0} \qquad \alpha + (\beta + 1) \equiv \mathbf{0} \quad \beta + (1 + \alpha) \equiv \mathbf{0} \tag{19}$$

Das Element $a + (b + c)$ ist identisch mit einem dieser drei Elemente. (Falls nötig, vertauschen wir b und c. Das ist wegen $\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_1$ erlaubt.) Ebenso ist das Element $(a + b) + c$ identisch mit einem der drei Elemente in (19), da wir wegen $\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_1$ $(a + b)$ und c vertauschen dürfen. (Falls nötig, vertauschen wir auch a und b.) Daraus folgt, dass $a + (b + c) \equiv \mathbf{0} \equiv (a + b) + c$, wie gewünscht.

Die obigen Fälle decken alle Möglichkeiten für das Tripel (a, b, c) ab. Somit haben wir $a + (b + c) \equiv (a + b) + c$ in allen Fällen gezeigt. Das beweist $\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_0$.

- $\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_4 \equiv \forall x \forall y \forall z \big(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\big)$ (Assoziativität der Multiplikation): Seien a, b, c Elemente von A.

  Fall: Eines der drei Elemente ist gleich $\mathbf{0}$: Es gilt $a \bullet (b \bullet c) \equiv \mathbf{0} \equiv (a \bullet b) \bullet c$, da $\mathbf{0} \bullet u \equiv \mathbf{0}$ für jedes $u \in A$ und wegen $\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_5$ Multiplikation kommutativ ist. Zum Beispiel gilt nämlich $\mathbf{0} \bullet (b \bullet c) \equiv \mathbf{0} \equiv \mathbf{0} \bullet c \equiv (\mathbf{0} \bullet b) \bullet c$.

  Fall: Eines der drei Elemente ist gleich $\mathbf{1}$: Es gilt $a \bullet (b \bullet c) \equiv (a \bullet b) \bullet c$, da $\mathbf{1}$ neutral bzgl. $\bullet$ ist und Multiplikation kommutativ ist. Zum Beispiel gilt nämlich $\mathbf{1} \bullet (b \bullet c) \equiv b \bullet c \equiv (\mathbf{1} \bullet b) \bullet c$.

  Fall: Keines der drei Elemente ist gleich $\mathbf{0}$ oder $\mathbf{1}$:

  Unterfall: $a \equiv c$: Da wegen $\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_5$ Multiplikation kommutativ ist, gilt

  $$a \bullet (b \bullet a) \equiv a \bullet (a \bullet b) \equiv (a \bullet b) \bullet a,$$

  wie gewünscht.

  Unterfall: $a \equiv b \not\equiv c$: Wir können die Gleichheit

  $$a \bullet (a \bullet c) \equiv (a \bullet a) \bullet c \tag{20}$$

  mittels der Multiplikationstabelle für jedes Paar $a \not\equiv c$ überprüfen. (Tun Sie das exemplarisch für $a \equiv \alpha$, $c \equiv \beta$.) Es gibt 2 solche Paare, nämlich (α, β) und (β, α). Für jede der 2 Seiten von (20) müssen wir 2 Multiplikationen in der Tabelle nachschlagen.

  Unterfall: $a \not\equiv b \equiv c$: Es gilt:

  $$\begin{aligned} a \bullet (b \bullet b) &\equiv (b \bullet b) \bullet a && (\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_5\text{, Kommutativität der Addition}) \\ &\overset{(20)}{\equiv} b \bullet (b \bullet a) \\ &\overset{\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_5}{\equiv} (a \bullet b) \bullet b, \end{aligned}$$

  wie gewünscht.

Die obigen Fälle decken alle Möglichkeiten für das Tripel (a, b, c) ab. Somit haben wir $a \bullet (b \bullet c) \equiv (a \bullet b) \bullet c$ in allen Fällen gezeigt. Das beweist $\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_4$.

Bemerkung: Im Fall, dass keines der drei Elemente gleich $\mathbf{0}$ ist, ist der obige Beweis von $\mathbf{I} \models \mathsf{KT}_4$ analog zum Beweis von $\mathbf{I} \models \mathsf{GT}_0$ in der Lösung zur Aufgabe **4**.a. Das neutrale Element $\mathbf{1}$ spielt dabei die Rolle des neutralen Elementes $\boldsymbol{e}$. Die Multiplikation $\bullet$ spielt die Rolle der Verknüpfung $\circ$.

- $\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_8 \equiv \forall x \forall y \forall z \big(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)\big)$ (Multiplikation ist links-distributiv über Addition): Seien $a, b, c \in A$.

  Fall: $a \equiv \mathbf{0}$: Gemäss der Additions- und Multiplikationstabelle gilt:
  $$\mathbf{0} \bullet (b + c) \equiv \mathbf{0} \equiv \mathbf{0} + \mathbf{0} \equiv \mathbf{0} \bullet b + \mathbf{0} \bullet c$$
  Fall: $a \equiv \mathbf{1}$: Gemäss der Additions- und Multiplikationstabelle gilt:
  $$\mathbf{1} \bullet (b + c) \equiv b + c \equiv \mathbf{1} \bullet b + \mathbf{1} \bullet c$$
  Fall: $b \equiv \mathbf{0}$: Gemäss der Additions- und Multiplikationstabelle gilt:
  $$a \bullet (\mathbf{0} + c) \equiv a \bullet c \equiv \mathbf{0} + a \bullet c \equiv a \bullet \mathbf{0} + a \bullet c$$
  Fall: $b \equiv c$: Gemäss der Additions- und Multiplikationstabelle gilt:
  $$a \bullet (b + b) \equiv a \bullet \mathbf{0} \equiv \mathbf{0} \equiv u + u, \qquad u :\equiv a \bullet b$$
  Fall: $a \equiv \alpha$ oder β:

  Unterfall (*): ($b \equiv \mathbf{1}$ und $c \equiv \alpha$ oder β) oder $(b, c) \equiv (\alpha, \beta)$:
  Wir können die Gleichheit
  $$a \bullet (b + c) \equiv a \bullet b + a \bullet c \tag{21}$$
  für jedes solche Tripel (a, b, c) mittels der Additions- und Multiplikationstabelle überprüfen. (Tun Sie das exemplarisch für $(a, b, c) \equiv (\alpha, \mathbf{1}, \alpha)$!)

  Unterfall: ($b \equiv \alpha$ oder β und $c \equiv \mathbf{1}$) oder $(b, c) \equiv (\beta, \alpha)$:
  Die Gleichheit (21) folgt aus dem Unterfall (*) und Kommutativität der Addition, indem wir b und c vertauschen.

  Die obigen Fälle decken alle Möglichkeiten für das Tripel (a, b, c) ab. Somit haben wir die Gleichheit (21) in allen Fällen gezeigt. Das beweist $\mathrm{M} \models \mathsf{KT}_8$.

Somit haben wir $\mathrm{M} \models \mathsf{KT}$ gezeigt, d. h., (A, M) ist ein Modell der Körpertheorie KT.

5. (**Existenz Rechts-Inversen impliziert nicht Existenz eines Links-Inversen.**) Wir betrachten die Signatur $\mathscr{L}_{\mathsf{GT}} := \{e, \circ\}$ und die Axiome:
$$\begin{aligned} \mathsf{GT}_0 &\equiv \forall x \forall y \forall z \big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\big) \\ \mathsf{GT}_1 &\equiv \forall x (e \circ x = x) \\ \sigma : &\equiv \forall x \exists y (x \circ y = e) \end{aligned}$$
(GT_0 und GT_1 sind Axiome der Gruppentheorie.) Wir definieren die Theorie $\mathsf{T} := \{\mathsf{GT}_0, \mathsf{GT}_1, \sigma\}$.

Bemerkungen:

- Intuitiv besagt σ, dass jedes Objekt x ein *Rechts*inverses besitzt.
- Es gilt $\sigma \not\equiv \mathsf{GT}_2 \equiv \forall x \exists y (y \circ x = e)$. Intuitiv besagt das Axiom GT_2, dass jedes Objekt x ein *Links*inverses besitzt.

Seien $\boldsymbol{e}$ und α zwei Objekte. Wir definieren $A := \{\boldsymbol{e}, \alpha\}$ und die Funktion $\boldsymbol{\circ} : A^2 \to A$ durch

$$a \boldsymbol{\circ} b :\equiv \boldsymbol{\circ}(a, b) :\equiv b, \qquad \text{für alle } a, b \in A.$$

Wir definieren die Abbildung $\mathbf{M}$ auf $\mathscr{L}_{\mathsf{GT}}$ durch

$$e^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{M}(e) :\equiv \boldsymbol{e}, \qquad \circ^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{M}(\circ) :\equiv \boldsymbol{\circ}.$$

Das Paar $\mathbf{M} := (A, \mathbf{M})$ ist eine $\mathscr{L}_{\mathsf{GT}}$-Struktur.

(a) Zeigen Sie: $\mathbf{M} \models \mathsf{T}$

(b) Zeigen Sie: $\mathbf{M} \not\models \mathsf{GT}_2$

Bemerkungen:

- Für jedes Modell G der Gruppentheorie GT gilt, dass $G \models \sigma$. (Das folgt daraus, dass G eine Gruppe ist und darum in G jedes Linksinverse ein Rechtsinverses ist.) Aus dem Gödelschen Vollständigkeitssatz folgt daher, dass $\mathsf{GT} \vdash \sigma$ und daher

$$\mathsf{GT} \vdash \mathsf{T},$$

  d. h., die Gruppentheorie beweist T.
- Gemäss (a,b) ist $\mathbf{M}$ ein Modell von T, aber kein Modell von GT_2. Aus der Kontraposition des Korrektheitssatzes folgt daher, dass $\mathsf{T} \nvdash \mathsf{GT}_2$ und daher

$$\mathsf{T} \nvdash \mathsf{GT},$$

  d. h., die Theorie T beweist die Gruppentheorie. (Wir werden den Korrektheitssatz nächste Woche in der Vorlesung behandeln.)
- Falls wir in T das Axiom GT_1 durch das Axiom e *ist (links- und rechts-)neutral* ersetzen, dann beweist die abgeänderte Theorie die Gruppentheorie. Genauer gesagt betrachten wir das Axiom

$$\tau :\equiv \forall x \big(e \circ x = x \wedge x \circ e = x\big).$$

  Es gilt:

$$\widetilde{\mathsf{T}} := \big\{\mathsf{GT}_0, \tau, \sigma\big\} \vdash \mathsf{GT}$$

  Für jedes Modell $\mathbf{M}$ von $\widetilde{\mathsf{T}}$ gilt nämlich $\mathbf{M} \models \{\mathsf{GT}_1, \mathsf{GT}_2\}$ und daher $\mathbf{M} \models \mathsf{GT}$. (Überlegen Sie sich das!) Aus dem Gödelschen Vollständigkeitssatz folgt daher, dass $\widetilde{\mathsf{T}} \vdash \mathsf{GT}$, wie behauptet.

Lösung:

(a) – (GT_0, Assoziativität) Für alle $a, b, c \in \{\boldsymbol{e}, \alpha\}$ gilt:

$$a \boldsymbol{\circ} (b \boldsymbol{\circ} c) \equiv (b \boldsymbol{\circ} c) \equiv c \equiv (a \boldsymbol{\circ} b) \boldsymbol{\circ} c$$

Daraus folgt $\mathbf{M} \models \mathsf{GT}_0$. (Warum?)

- (GT_1, linke Neutralität) Da $\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e} \equiv \boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{e} \circ \alpha \equiv \alpha$, ist $\boldsymbol{e}$ linksneutral. Daraus folgt, dass $\mathrm{M} \models \mathsf{GT}_1$. (Warum?)
- (σ, Rechtsinverses) Da $\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e} \equiv \boldsymbol{e}$, besitzt $\boldsymbol{e}$ ein Rechtsinverses. Da $\alpha \circ \boldsymbol{e} \equiv \boldsymbol{e}$, besitzt α ein Rechtsinverses. Daraus folgt, dass $\mathrm{M} \models \sigma$. (Warum?)

Das zeigt, dass $\mathrm{M} \models \mathsf{T}$.

(b) Da $\boldsymbol{e} \circ \alpha \equiv \alpha$ und $\alpha \circ \alpha \equiv \alpha$, besitzt α kein Linksinverses. Daraus folgt, dass $\mathrm{M} \not\models \mathsf{GT}_2$ und daher, dass $\mathrm{M} \not\models \mathsf{GT}$. (Warum?)