

Musterlösung Serie 5

STRUKTUR, VARIABLENBELEGUNG, INTERPRETATION, MODELL EINER THEORIE

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (*) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0. (Modell) Seien e, α, β verschiedene Objekte.

- (a) ((*) Gruppentheorie) Wir betrachten die Signatur der Gruppentheorie, $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{GT} = \{e, \circ\}$. Wir definieren den Bereich $A := \{e, \alpha, \beta\}$ und die Abbildung $\circ : A^2 = A \times A \rightarrow A$ durch folgende Verknüpfungstabelle:

$\circ$	e	α	β
e	e	α	β
α	α	β	e
β	β	e	α

Wir definieren die Abbildung M auf $\mathcal{L}_{GT}$ durch:

$$e^M \equiv M(e) := e \quad \circ^M \equiv M(\circ) := \circ$$

Zeigen Sie, dass (A, M) ein Modell der Gruppentheorie ist.

Bemerkung: Für jede $\mathcal{L}_{GT}$ -Struktur (A, M) gilt $M \models GT$ genau dann, wenn das Tripel $(A, e^M, \circ^M)$ eine Gruppe ist. Das Tripel $(A, e, \circ)$ aus dieser Aufgabe ist also eine Gruppe.

Hinweise:

- Zeigen Sie $M \models GT_i$ in der Reihenfolge $i = 1, 0, 2$.
- $M \models GT_1 := \forall x(e \circ x = x)$: Sei j eine Variablenbelegung in M . Wir definieren die Interpretation $I := (M, j)$.
 - Sei $a \in A$. Zeigen Sie, dass $I \stackrel{a}{x}(e \circ x) \equiv I \stackrel{a}{x}(x)$. Verwenden Sie dazu, dass $I \stackrel{a}{x}(e) \equiv e^M \equiv e$, sowie die e -Zeile¹ der Verknüpfungstabelle.
 - Folgern Sie, dass $I \models \forall x(e \circ x = x) \equiv GT_1$.

Bemerkung: $M \models \forall x(e \circ x = x)$ ist äquivalent dazu, dass für jedes $a \in A$ gilt: $e \circ a = a$, d. h., e ist links-neutral.

- $M \models GT_0 := \forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$: Sei j eine Variablenbelegung in M . Wir definieren $I := (M, j)$. Seien $a, b, c \in A$. Wir kürzen ab: $J := ((I \stackrel{a}{x}) \stackrel{b}{y}) \stackrel{c}{z}$.
 - Zeigen Sie, dass

$$J(x \circ (y \circ z)) \equiv J((x \circ y) \circ z). \quad (1)$$

Verwenden Sie dazu Folgendes:

$$J(z) \equiv c \quad J(y) \equiv b \quad J(x) \equiv a \quad (2)$$

$$a \circ (b \circ c) \equiv (a \circ b) \circ c \quad \text{für alle } a, b, c \in A \quad (3)$$

¹Für jedes Symbol s in der Kopfspalte (= Spalte ganz links) meinen wir mit s -Zeile die Zeile der Tabelle, welche die Kopfspalte in der Zelle mit dem Symbol s schneidet.

Warum gelten die Identitäten (2)?

Um (3) zu zeigen, können wir im Prinzip alle Tripel $(a, b, c) \in A^3$ durchgehen und die Verknüpfungstabelle benutzen. Es gibt $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ solche Tripel. Um den Beweis von (3) zu vereinfachen, tun Sie Folgendes: Verwenden Sie, dass $\circ$ in unserem Beispiel kommutativ ist. (Überprüfen Sie das mit Hilfe der Verknüpfungstabelle!) Betrachten Sie folgende Fälle:

* (Mindestens) eines der drei Elemente a, b, c ist gleich e .

* Keines der drei Elemente ist gleich e : Unterfälle:

$$a \equiv c$$

$$a \equiv b \neq c$$

$$a \neq b \equiv c: \text{ Verwenden Sie den Unterfall } a \equiv b \neq c.$$

- Folgern Sie aus (1), dass $((\mathbf{I}_x^a)_y^b)_z^c \models (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$.
- Folgern Sie daraus, dass $(\mathbf{I}_x^a)_y^b \models \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$.
- Argumentieren Sie analog für die Quantoren $\forall y$ und $\forall x$.

Lösung:

- $\mathbf{M} \models \mathbf{GT}_1 \equiv \forall x (e \circ x = x)$ (e ist links-neutral.): Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Sei $a \in A$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_x^a(e \circ x) &\equiv \mathbf{I}_x^a(e) \circ^{\mathbf{M}} \mathbf{I}_x^a(x) \\ &\equiv (e^{\mathbf{M}} \equiv e) \circ a \\ &\equiv a \quad (\text{gemäss der } e\text{-Zeile der Verknüpfungstabelle}) \\ &\equiv \mathbf{I}_x^a(x) \end{aligned}$$

Gemäss der Definition $\models$ folgt daraus, dass $\mathbf{I}_x^a \models e \circ x = x$. Da a beliebig ist, folgt daraus mittels der Definition $\models$, dass

$$\mathbf{I} \models \forall x (e \circ x = x) \equiv \mathbf{GT}_1.$$

Da j beliebig ist, folgt daraus, dass

$$\mathbf{M} \models \mathbf{GT}_1.$$

- $\mathbf{M} \models \mathbf{GT}_0 \equiv \forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$ (Assoziativität von $\circ$):

Bemerkung: $\circ$ ist kommutativ, da die Verknüpfungstabelle symmetrisch ist bzgl. Spiegelung an der (nach rechts unten zeigenden) Diagonale.

Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Seien $a, b, c \in A$. Wir kürzen ab: $J := ((\mathbf{I}_x^a)_y^b)_z^c$. Es gilt:

$$J(z) \equiv c \quad J(y) \equiv (\mathbf{I}_x^a)_y^b(y) \equiv b \quad J(x) \equiv (\mathbf{I}_x^a)_y^b(x) \equiv \mathbf{I}_x^a(x) \equiv a \quad (4)$$

Behauptung:

$$a \circ (b \circ c) \equiv (a \circ b) \circ c \quad \text{für alle } a, b, c \in A \quad (5)$$

Beweis der Behauptung:

Fall: Eines der drei Elemente ist gleich e : Es gilt $a \circ (b \circ c) \equiv (a \circ b) \circ c$, da e neutral bzgl. $\circ$ ist und $\circ$ kommutativ ist. Zum Beispiel gilt nämlich $e \circ (b \circ c) \equiv b \circ c \equiv (e \circ b) \circ c$.

Fall: Keines der drei Elemente ist gleich e :

Unterfall: $a \equiv c$: Da gemäss obiger Bemerkung $\circ$ kommutativ ist, gilt

$$a \circ (b \circ a) \equiv a \circ (a \circ b) \equiv (a \circ b) \circ a,$$

wie gewünscht.

Unterfall: $a \equiv b \neq c$: Wir können die Gleichheit

$$a \circ (a \circ c) \equiv (a \circ a) \circ c \tag{6}$$

mittels der Verknüpfungstabelle für jedes Paar $a \neq c$ überprüfen. (Tun Sie das exemplarisch für $a \equiv \alpha$, $c \equiv \beta$.) Es gibt 2 solche Paare, nämlich (α, β) und (β, α) . Für jede der 2 Seiten von (6) müssen wir 2 Multiplikationen in der Tabelle nachschlagen.

Unterfall: $a \neq b \equiv c$: Es gilt:

$$\begin{aligned} a \circ (b \circ b) &\equiv (b \circ b) \circ a && \text{(Kommutativität von } \circ) \\ &\stackrel{(6)}{\equiv} b \circ (b \circ a) \\ &\equiv (a \circ b) \circ b && \text{(Kommutativität von } \circ), \end{aligned}$$

wie gewünscht.

Die obigen Fälle decken alle Möglichkeiten für das Tripel (a, b, c) ab. Somit haben wir die Behauptung (5) in allen Fällen gezeigt.

Es gilt:

$$\begin{aligned} J(x \circ (y \circ z)) &\equiv J(x) \circ^{\mathbf{M}} J(y \circ z) \\ &\equiv J(x) \circ^{\mathbf{M}} (J(y) \circ^{\mathbf{M}} J(z)) \\ &\equiv a \circ (b \circ c) && \text{(gemäss (4))} \\ &\equiv (a \circ b) \circ c && \text{(gemäss (5))} \\ &\equiv (J(x) \circ^{\mathbf{M}} J(y)) \circ^{\mathbf{M}} J(z) && \text{(gemäss (4))} \\ &\equiv J(x \circ y) \circ^{\mathbf{M}} J(z) \\ &\equiv J((x \circ y) \circ z) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $((\mathbf{I}_x^a)_y^b)_z^c = J \models x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$. Da c beliebig ist, folgt daraus, dass $(\mathbf{I}_x^a)_y^b \models \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$. Da b beliebig ist, folgt daraus, dass $\mathbf{I}_x^a \models \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$. Da a beliebig ist, folgt daraus, dass

$$\mathbf{I} \models \forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z) \equiv \mathbf{GT}_0.$$

Da j beliebig ist, folgt daraus, dass

$$\mathbf{M} \models \mathbf{GT}_0.$$

- $\mathbf{M} \models \mathbf{GT}_2 := \forall x \exists y (y \circ x = e)$ (Jedes Element besitzt ein Links-Inverses.): Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Sei $a \in A$. Falls $a \equiv e$, dann erfüllt gemäss der Verknüpfungstabelle das Element $b := e$ die Bedingung $b \circ a \equiv e$. Falls $a \equiv \alpha$, dann erfüllt $b := \beta$ diese Bedingung. Falls $a \equiv \beta$, dann erfüllt $b := \alpha$ die Bedingung. Es gibt also in jedem Fall ein $b \in A$, sodass $b \circ a \equiv e$.

Bemerkung: Kurz gesagt besitzt jedes Element von A ein Links-Inverses bzgl. $\circ$, da im Tabellenkörper² der Verknüpfungstabelle in jeder Spalte ein e steht. (Überlegen Sie sich das!)

Wir wählen ein b , sodass $b \circ a \equiv e$. Es gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} \frac{a}{x}) \frac{b}{y} (y \circ x) &\equiv (\mathbf{I} \frac{a}{x}) \frac{b}{y} (y) \circ^{\mathbf{M}} (\mathbf{I} \frac{a}{x}) \frac{b}{y} (x) \\ &\equiv b \circ a \\ &\equiv e \\ &\equiv e^{\mathbf{M}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $(\mathbf{I} \frac{a}{x}) \frac{b}{y} \models y \circ x = e$. Gemäss der Definition von $\models$ gilt darum:

$$\mathbf{I} \frac{a}{x} \models \exists y (y \circ x = e)$$

Da a beliebig ist, folgt daraus:

$$\mathbf{I} \models \forall x \exists y (y \circ x = e) \equiv \mathbf{GT}_2$$

Somit haben wir gezeigt, dass

$$\mathbf{M} \models \mathbf{GT},$$

d. h., $\mathbf{M}$ ist ein Modell der Gruppentheorie $\mathbf{GT}$.

- (b) (**Gruppentheorie**) Finden Sie eine $\mathcal{L}_{\mathbf{GT}}$ -Struktur $(A, \mathbf{M})$ mit Bereich $A := \{e, \alpha\}$, sodass $\mathbf{M} \not\models \mathbf{GT}$.

Lösung: Wir definieren die Abbildung $\mathbf{M}$ auf $\mathcal{L}_{\mathbf{GT}}$ durch

$$e^{\mathbf{M}} := e \quad \circ^{\mathbf{M}} : A^2 \rightarrow A, \quad a \circ^{\mathbf{M}} b := e \text{ für jedes } (a, b) \in A^2$$

Das Paar $(A, \mathbf{M})$ ist kein Modell von $\mathbf{GT}$. Um das zu sehen, wählen wir eine beliebige Variablenbelegung j und definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Es gilt:

$$\mathbf{I} \frac{\alpha}{x} (e \circ x) \equiv e^{\mathbf{M}} \circ^{\mathbf{M}} \alpha \equiv e \neq \alpha \equiv \mathbf{I} \frac{\alpha}{x} (x)$$

Daher gilt $\mathbf{I} \frac{\alpha}{x} \not\models e \circ x = x$. Die Aussage $\mathbf{I} \frac{a}{x} \models e \circ x = x$ gilt also *nicht* für jedes $a \in A$. Daraus folgt, dass

$$\mathbf{I} \not\models \forall x (e \circ x = x) \equiv \mathbf{GT}_1.$$

Daraus folgt, dass $\mathbf{M} \not\models \mathbf{GT}_1$ und daher $\mathbf{M} \not\models \mathbf{GT}$.

²Das ist die Tabelle ohne Kopfzeile, Kopfspalte und die Zelle mit dem Verknüpfungszeichen $\circ$.

- (c) **(*) Theorie mit leerer Signatur**) Wir betrachten die leere Signatur $\mathcal{L} := \emptyset$ und die Theorie T gegeben durch folgendes Axiom:

$$x = y$$

- i. Finden Sie ein Modell von T .
- ii. Beschreiben Sie alle Modelle von T .

Lösung:

- i. Wir wählen ein Objekt α und definieren $A := \{\alpha\}$ und $\mathbf{M}$ als die leere Abbildung auf $\mathcal{L} = \emptyset$.³ Das Paar $(A, \mathbf{M})$ ist ein Modell von T , da für jede Variablenbelegung j für $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$ gilt, dass $\mathbf{I}(x) \equiv \alpha \equiv \mathbf{I}(y)$ und daher $\mathbf{I} \models x = y$, d. h. $\mathbf{I} \models \mathsf{T}$.
 - ii. Eine $\mathcal{L}$ -Struktur $(A, \mathbf{M})$ ist genau dann ein Modell von T , falls A *genau ein* Element besitzt. Die Implikation $\Leftarrow$ haben wir oben bewiesen. Die Implikation $\Rightarrow$ folgt aus den Tatsachen, dass jedes Modell per definitionem *mindestens ein* Element besitzt und dass jede Struktur mit mehr als einem Element kein Modell von T ist. (Warum?)
- (d) **(Ringtheorie)** Seien 0 und 1 zwei verschiedene Objekte. Finden Sie ein Modell $(A, \mathbf{M})$ der Ringtheorie mit Bereich $A := \{0, 1\}$. Überlegen Sie sich, dass tatsächlich $\mathbf{M} \models \mathsf{RT}$ gilt.

Bemerkung: Für jede $\mathcal{L}_{\mathsf{RT}}$ -Struktur $(A, \mathbf{M})$ gilt $\mathbf{M} \models \mathsf{RT}$ genau dann, wenn das Tupel $(A, 0^{\mathbf{M}}, 1^{\mathbf{M}}, +^{\mathbf{M}}, \cdot^{\mathbf{M}})$ ein Ring ist. Das Tupel $(A, 0, 1, +, \cdot)$ aus dieser Aufgabe ist also ein Ring.

Lösung: Wir definieren $+$ und $\cdot$ durch folgende Verknüpfungstabellen:

$+$	0	1	$\cdot$	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1

Wir definieren die Abbildung $\mathbf{M}$ auf $\mathcal{L}_{\mathsf{RT}}$ durch:

$$0^{\mathbf{M}} := 0 \quad 1^{\mathbf{M}} := 1 \quad +^{\mathbf{M}} := + \quad \cdot^{\mathbf{M}} := \cdot$$

Wir können analog zu Aufgabe 0.a überprüfen, dass in $(A, \mathbf{M})$ jedes Axiom der Ringtheorie gilt. Wir überprüfen exemplarisch, dass gilt:

$$\mathbf{M} \models \mathsf{RT}_0 \equiv \forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z) \quad (7)$$

Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren $I := (\mathbf{M}, j)$. Seien $a, b, c \in A$. Wir kürzen ab: $J := \left(\left(\mathbf{I} \frac{a}{x} \frac{b}{y} \right) \frac{c}{z} \right)$.

Behauptung:

$$a + (b + c) \equiv (a + b) + c \quad \text{für alle } a, b, c \in A. \quad (8)$$

Beweis der Behauptung:

Fall: Eines der drei Elemente ist gleich 0 . Nehmen wir beispielsweise an, dass $a \equiv 0$. Dann ist $0 + (b + c) \equiv b + c$ und $(0 + b) + c \equiv b + c$, also gilt die Behauptung.

Fall: Alle drei Elemente sind gleich 1 . Dann ist $(1 + 1) + 1 \equiv 0 + 1 \equiv 1$ und $1 + (1 + 1) \equiv 1 + 0 \equiv 1$, also gilt die Behauptung.

³Das ist die einzige Abbildung auf $\emptyset$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 J(x + (y + z)) &\equiv J(x) + (J(y) + J(z)) \\
 &\equiv a + (b + c) \\
 &\equiv (a + b) + c \quad (\text{gemäss (8)}) \\
 &\equiv (J(x) + J(y)) + J(z) \\
 &\equiv J((x + y) + z).
 \end{aligned}$$

Von hier aus zeigt dasselbe Argument wie in 4(a), dass (7) gilt.

- (e) **(Ringtheorie)** Finden Sie eine $\mathcal{L}_{\text{RT}}$ -Struktur (A, M) mit Bereich $A := \{0, 1\}$, sodass $M \models \text{RT}$.

Lösung: Wir definieren $0^M := 0$, $1^M := 0$ und $+^M, \cdot^M : A^2 \rightarrow A$ als die konstanten Abbildungen $+^M(a, b) := 0$, $\cdot^M(a, b) := 0$, für alle $(a, b) \in A^2$. Das Tupel (A, M) ist kein Modell der Ringtheorie RT, da $M \not\models \text{RT}_2$, $M \not\models \text{RT}_5$. (Warum?)

Bemerkung: Sei M ein Modell von $\mathcal{L}_{\text{RT}}$ mit Bereich $A = \{0, 1\}$, sodass $0^M \equiv 0$. Dann gilt $1^M \equiv 1$, $+^M \equiv +$, $\cdot^M \equiv \cdot$. (Überprüfen Sie das!) Es gibt also nur *ein* Modell von $\mathcal{L}_{\text{RT}}$ mit diesem Bereich und mit $0^M \equiv 0$, nämlich das aus Aufgabe 0.d. Daraus folgt, dass es bis auf Isomorphie nur einen Ring mit zwei Elementen gibt.

- (f) **(Teiltheorie von DLO)** Seien α, β, γ verschiedene Objekte. Finden Sie ein Modell (A, M) der Theorie $T := \{\text{DLO}_0, \text{DLO}_1, \text{DLO}_2\}$ mit Bereich $A := \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Lösung: Wir definieren die Abbildung M auf $\mathcal{L}_{\text{DLO}}$ durch $<^M := M(<) := < := \{(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\beta, \gamma)\}$.

$M \models \text{DLO}_0$ gilt, weil $(\alpha, \alpha) \notin <$ und $(\beta, \beta) \notin <$ und $(\gamma, \gamma) \notin <$, d. h. für jedes $a \in A$ gilt $(a, a) \notin <$.

$M \models \text{DLO}_1$: Sei $(a, b, c) \in A^3$, sodass $a < b$ und $b < c$. Dann gilt $(a, b, c) \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$ und daher $a < b$. Daraus folgt, dass $M \models \text{DLO}_1$.

Auf eine ähnliche Weise können wir zeigen, dass für jedes Paar $(a, b) \in A^2$ gilt: $a < b$ oder $b < a$ oder $a \equiv b$. Daher gilt $M \models \text{DLO}_2$.

- (g) **(Teiltheorie von DLO)** Finden Sie ein Modell (A, M) der Theorie $T := \{\text{DLO}_0, \text{DLO}_1, \text{DLO}_2\}$ mit einem unendlichen Bereich.

Hinweis: Verwenden Sie eine andere Übungsaufgabe.

Bemerkung: Überlegen Sie sich grundsätzlich, dass Ihr gefundenes (A, M) tatsächlich ein Modell von T ist. Es wird *nicht* erwartet, dass Sie das im Detail ausführen.

Lösung: Wir definieren $A := \mathbb{N} := \{\varepsilon, |, ||, |||, \dots\}$ (Menge der natürlichen Zahlen) und die binäre Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$ wie in einer Aufgabe in Übungsreihe 4, nämlich

$$\leq := \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{ES GIBT EIN } k \text{ IN } \mathbb{N}, \text{ SODASS } km \equiv n.\}.$$

(km ist die Verkettung von k und m .) Für jedes Paar $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ schreiben wir $m \leq n$ genau dann, falls $(m, n) \in \leq$. Wir definieren die Relation $<$ auf $\mathbb{N}$ als

$$< := \{(m, n) \in \leq \mid m \neq n\}. \quad (9)$$

Wir definieren M als die Abbildung auf $\mathcal{L}_{DLO}$ gegeben durch $<^M := <$. Wir können analog zu den Aufgaben 0.a und 0.d überprüfen, dass $(\mathbb{N}, M)$ ein Modell von T ist. Zum Beispiel gilt $M \models DLO_0 \equiv \forall x \neg(x < x)$, da für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $n < n$ nicht gilt. Es folgt, dass $(\mathbb{N}, M)$ ein Modell von T ist. Sein Bereich $A = \mathbb{N}$ ist eine unendliche Menge.

Bemerkung: Es gilt $M \not\models DLO_3$, da zum Beispiel $0 := \varepsilon < 1 := |$, es aber kein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < n$ und $n < 1$ gibt. Es gibt auch ein kleinstes Element, nämlich 0. Daher gilt $M \not\models DLO_4$.

- (h) **(Theorie der dichten linearen Ordnungen)** Finden Sie ein Modell (A, M) der Theorie DLO der dichten linearen Ordnungen.

Hinweis: Definieren Sie A als eine gewisse Menge von Zahlen.

Bemerkung: Überlegen Sie sich, dass tatsächlich $M \models DLO$ gilt. Sie dürfen dabei grundlegende Eigenschaften von Zahlen verwenden.

Lösung: Wir definieren $\mathbb{N}$ als die Menge der positiven natürlichen Zahlen, $0 := \varepsilon$, $1 := |$ und Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ auf $\mathbb{N}$ wie in der Vorlesung (Standardmodell der Peano-Arithmetik). Für $m, n \in \mathbb{N}$ kürzen wir ab:

$$mn := m \cdot n$$

(mn bedeutet hier also das Produkt von m und n , nicht die Verkettung der Zeichenfolgen.) Wir definieren $\mathbb{N}_{>0} := \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$A := \mathbb{Q}_{>0} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$$

(Menge der positiven rationalen Zahlen), $<$ wie in (9) und $<$ durch

$$\frac{k}{\ell} < \frac{m}{n} \quad \text{g. d. w.} \quad kn < \ell m.$$

(Das ist die übliche strikte Ordnung auf $\mathbb{Q}_{>0}$.) Wir definieren die Abbildung M auf $\mathcal{L}_{DLO}$ durch

$$<^M := <.$$

Wir zeigen, dass (A, M) ein Modell von DLO ist. Aus der Definition von $<$ folgt, dass $M \models \{DLO_0, DLO_1, DLO_2\}$.

- $M \models DLO_3$: Seien $r, s \in A = \mathbb{Q}_{>0}$, sodass $r < s$. Wir wählen $k, \ell, m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass

$$\frac{k}{\ell} \equiv r, \quad \frac{m}{n} \equiv s.$$

Es gilt

$$r \equiv \frac{k}{\ell} < \frac{k+m}{\ell+n} < \frac{m}{n} \equiv s.$$

Daraus folgt, dass $M \models DLO_3$.

- $M \models DLO_4$: Sei $r \in A$. Wir wählen $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass $r \equiv \frac{m}{n}$. Es gilt

$$\frac{m}{n+1} < \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n}$$

Daraus folgt, dass $M \models DLO_4$. Wir haben also gezeigt, dass $M \models DLO$, d. h. M ist ein Modell für DLO.

- (i) **((*) Peano-Arithmetik)** Wir definieren $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, das Standardmodell der Peano-Arithmetik, wie in der Vorlesung, wobei wir abweichend von der ursprünglichen Definition $s^{\mathbb{N}}(n) := n|$ statt $|n$ definieren. (Dadurch vereinfacht sich diese Übungsaufgabe.) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ ein Modell der Peano-Arithmetik ist.

Bemerkungen:

- Sie dürfen 0.(i,ii,iii) ohne Beweis verwenden.
- Es wird *nicht* erwartet, dass Sie alle Details des Beweises von $\mathbb{N} \models \text{PA}_6$ ausführen. Erklären Sie stattdessen in Worten, warum diese Aussage gilt.

Lösung:

- $\mathbb{N} \models \text{PA}_0$: Wir schreiben in dieser Aufgabe $m +^{\mathbb{N}} n := m \dot{+} n := mn$ für die Verkettung der Zeichenfolgen $m \equiv |\dots|$ und $n \equiv |\dots|$ und $\cdot^{\mathbb{N}} := \cdot$ für die Multiplikation auf $\mathbb{N}$. Wir haben $0^{\mathbb{N}} := \mathbf{0} := \varepsilon$ definiert. Da ε die leere Zeichenkette ist, gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $s^{\mathbb{N}}(n) \equiv n| \neq \varepsilon$. Daraus folgt, dass $\mathbb{N} \models \text{PA}_0$.
- $\mathbb{N} \models \text{PA}_1$: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ so, dass $m| \equiv n|$. Gemäss 0.(ii) (Injektivität des Hinzufügens) gilt dann $m \equiv n$. Daraus folgt, dass $\mathbb{N} \models \text{PA}_1$. (Überprüfen Sie das!)
- $\mathbb{N} \models \text{PA}_2$ folgt aus: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $n + \mathbf{0} \equiv n\varepsilon = n$.
- $\mathbb{N} \models \text{PA}_3$ folgt aus: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $m(n|) \equiv (mn)|$. Das folgt aus 0.(i) (Assoziativität der Verkettung).
- $\mathbb{N} \models \text{PA}_4$ folgt aus: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \cdot \varepsilon \equiv \varepsilon$ (keine Kopie von n).
- $\mathbb{N} \models \text{PA}_5$ folgt aus: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $m \cdot (n|) \equiv (m \cdot n)m \equiv (m \cdot n) + m$. Wir haben hier eine Kopie von m für jeden Strich in $m|$, d. h. eine Kopie von m für jeden Strich in n und noch eine Kopie von m für den letzten Strich in $n|$.
- $\mathbb{N} \models \text{PA}_6$: Das folgt mittels (Meta-)Induktion. Um das zu sehen, betrachten wir exemplarisch $\nu \equiv x$ und die Formel

$$\varphi := x + y = y + x. \quad (10)$$

Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbb{N}$. Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbb{N}, j)$. Wir nehmen an, dass gilt:

$$\mathbf{I} \models \varphi(x/0) \wedge \forall x (\varphi \rightarrow \varphi(x/sx)) \equiv 0+y = y+0 \wedge \forall x (x+y = y+x \rightarrow sx+y = y+sx) \quad (11)$$

Wir zeigen, dass dann gilt:

$$\mathbf{I} \models \forall x \varphi \equiv \forall x (x + y = y + x) \quad (12)$$

Wir definieren $m := j(y)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir:
 $P(n) : n + m \equiv m + n$

Aus (11) und der Definition von $\models$ folgt, dass gilt:

$$\mathbf{I} \models 0+y = y+0 \text{ und für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \mathbf{I} \frac{n}{x} \models x+y = y+x \rightarrow sx+y = y+sx. \quad (13)$$

$\mathbf{I} \models 0 + y = y + 0$ ist äquivalent zu $P(\varepsilon)$.

$\mathbf{I} \frac{n}{x} \models x + y = y + x \rightarrow sx + y = y + sx$ ist äquivalent zu:

$P(n)$ impliziert $P(n|)$.

(Überlegen Sie sich das!) Aus (13) folgt daher, dass gilt:

$$P(\varepsilon) \quad \text{und} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } P(n) \text{ impliziert } P(n|).$$

Mittels 0.(iii) (Induktion) folgt daraus, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $P(n)$ gilt. Dass bedeutet, dass (12) gilt. (Überlegen Sie sich das!) Wir haben gezeigt, dass gilt:

$$\mathbf{I} \models \left(\varphi(x/0) \wedge \forall x (\varphi \rightarrow \varphi(x/sx)) \right) \rightarrow \forall x \varphi$$

Da j beliebig ist, folgt daraus, dass gilt:

$$\mathbb{N} \models \left(\varphi(x/0) \wedge \forall x (\varphi \rightarrow \varphi(x/sx)) \right) \rightarrow \forall x \varphi$$

Das zeigt $\mathbb{N} \models \mathbf{PA}_6$ im Fall $\nu \equiv x$ und φ gegeben durch (10). Ein ähnliches Argument funktioniert für allgemeine ν und φ . Daher gilt $\mathbb{N} \models \mathbf{PA}_6$. Somit haben wir gezeigt, dass

$$\mathbb{N} \models \mathbf{PA},$$

d. h. $\mathbb{N}$ ist ein Modell für $\mathbf{PA}$.

- (j) (**Körpertheorie**) Seien $0, 1, \alpha, \beta$ verschiedene Objekte. Wir definieren $A := \{0, 1, \alpha, \beta\}$ und die Abbildungen $+, \cdot : A^2 \rightarrow A$ durch folgende Tabellen:

$+$	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

$\cdot$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

Wir definieren die Abbildung $\mathbf{M}$ auf $\mathcal{L}_{\text{KT}} = \{0, 1, +, \cdot\}$, der Signatur der Körpertheorie, durch:

$$0^{\mathbf{M}} := \mathbf{M}(0) := 0 \quad 1^{\mathbf{M}} := \mathbf{M}(1) := 1 \quad +^{\mathbf{M}} := \mathbf{M}(+) := + \quad \cdot^{\mathbf{M}} := \mathbf{M}(\cdot) := \cdot$$

Zeigen Sie, dass $(A, \mathbf{M})$ ein Modell von KT ist.

Bemerkungen: Für jede $\mathcal{L}_{\text{KT}}$ -Struktur $(A, \mathbf{M})$ gilt $\mathbf{M} \models \text{KT}$ genau dann, wenn das Tupel $(A, 0^{\mathbf{M}}, 1^{\mathbf{M}}, +^{\mathbf{M}}, \cdot^{\mathbf{M}})$ ein Körper ist. Das Tupel $(A, 0, 1, +, \cdot)$ aus dieser Aufgabe ist also ein Körper.

Hinweise:

- Zeigen Sie $\mathbf{M} \models \text{KT}_i$ in der Reihenfolge $i = 9, 2, 1, 3, 5, 6, 7, 0, 4, 8$. ($i = 0, 4, 8$ sind aufwendig.)
- $\mathbf{M} \models \text{KT}_9 \equiv 0 \neq 1$: Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Zeigen Sie, dass *nicht* $\mathbf{I}(0) \equiv \mathbf{I}(1)$. Folgern Sie daraus, dass $\mathbf{I} \models \neg(0 = 1)$.
Bemerkung: $\mathbf{M} \models 0 \neq 1$ ist äquivalent dazu, dass $0 \neq 1$.
- $\mathbf{M} \models \text{KT}_2 \equiv \forall x(0 + x = x)$ (Links-Neutralität der Null bzgl. Addition): Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$.

- Sei $a \in A$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{I}_x^a(0 + x) \equiv \mathbf{I}_x^a(x)$. Verwenden Sie dazu, dass $\mathbf{I}_x^a(0) \equiv 0^M \equiv \mathbf{0}$, sowie die 0-Zeile der Additionstabelle.
- Folgern Sie, dass $\mathbf{I} \models \forall x(0 + x = x) \equiv \mathbf{KT}_2$.

Bemerkung: $\mathbf{M} \models \forall x(0 + x = x)$ ist äquivalent dazu, dass für jedes $a \in A$ gilt: $\mathbf{0} + a = a$, d. h., $\mathbf{0}$ ist links-neutral.

- $\mathbf{M} \models \mathbf{KT}_1 \equiv \forall y(x + y = y + x)$ (Kommutativität der Addition): Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Seien $a, b \in A$. Wir kürzen ab: $J := (\mathbf{I}_x^a)_y^b$.
- Zeigen Sie, dass

$$J(x + y) \equiv J(y + x). \quad (14)$$

Verwenden Sie dazu Folgendes:

$$J(y) \equiv b, J(x) \equiv a \text{ (Warum?)}$$

Die Additionstabelle ist symmetrisch bzgl. Spiegelung an der (nach rechts unten zeigenden) Diagonale.

- Folgern Sie aus (14), dass $(\mathbf{I}_x^a)_y^b \models (x + y = y + x)$.
- Folgern Sie daraus, dass $\mathbf{I}_x^a \models \forall y(x + y = y + x)$.
- Zeigen Sie $\mathbf{M} \models \mathbf{KT}_i$ für die übrigen i auf eine analoge Weise mit Hilfe der Additions- und Multiplikationstabellen.
- $\mathbf{M} \models \mathbf{KT}_0 \equiv \forall x \forall y \forall z(x + (y + z) = (x + y) + z)$ (Assoziativität der Addition): Seien $a, b, c \in A$. Um $a + (b + c) \equiv (a + b) + c$ zu zeigen, können wir im Prinzip alle Tripel $(a, b, c) \in A^3$ durchgehen. Davon gibt es $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Um den Beweis zu vereinfachen, tun Sie Folgendes: Verwenden Sie, dass Addition kommutativ ist. Betrachten Sie folgende Fälle:
 - (Mindestens) eines der drei Elemente a, b, c ist gleich $\mathbf{0}$.
 - Keines der drei Elemente ist gleich $\mathbf{0}$: Unterfälle:
 - $a \equiv c$:
 - $a \equiv b \neq c$
 - $a \neq b \equiv c$: Verwenden Sie den Unterfall $a \equiv b \neq c$.
 - a, b, c sind alle verschieden
- $\mathbf{M} \models \mathbf{KT}_4 \equiv \forall x \forall y \forall z(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$ (Assoziativität der Multiplikation): Seien $a, b, c \in A$. Verwenden Sie, dass Multiplikation kommutativ ist. Betrachten Sie folgende Fälle:
 - Eines der drei Elemente a, b, c ist gleich $\mathbf{0}$.
 - Eines der drei Elemente ist gleich $\mathbf{1}$.
 - Keines der drei Elemente ist gleich $\mathbf{0}$ oder $\mathbf{1}$: Unterfälle:
 - $a \equiv c$
 - $a \equiv b \neq c$
 - $a \neq b \equiv c$: Verwenden Sie den Unterfall $a \equiv b \neq c$.

Lösung: Wir zeigen, dass $\mathbf{M} := (A, \mathbf{M})$ die Axiome der Körpertheorie erfüllt:

- $\mathbf{M} \models \text{KT}_9 \equiv 0 \neq 1$ (Null ungleich Eins): Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(0) &\equiv 0^{\mathbf{M}} \\ &\equiv \mathbf{0} \\ &\neq \mathbf{1} \quad (\text{gemäss unserer Wahl}) \\ &\equiv 1^{\mathbf{M}} \\ &\equiv \mathbf{I}(1), \end{aligned}$$

also *nicht* $\mathbf{I}(0) \equiv \mathbf{I}(1)$, also *nicht* $\mathbf{I} \models (0 = 1)$, also $\mathbf{I} \models \neg(0 = 1) \equiv \text{KT}_9$. Da j beliebig ist, folgt daraus, dass $\mathbf{M} \models \text{KT}_9$.

- $\mathbf{M} \models \text{KT}_2 \equiv \forall x(0 + x = x)$ (Links-Neutralität der Null bzgl. Addition): Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Sei $a \in A$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \frac{a}{x}(0 + x) &\equiv \mathbf{I} \frac{a}{x}(0) + \mathbf{I} \frac{a}{x}(x) \\ &\equiv 0^{\mathbf{M}} + a \\ &\equiv \mathbf{0} + a \\ &\equiv a \quad (\mathbf{0}\text{-Zeile der Additionstabelle}) \\ &\equiv \mathbf{I} \frac{a}{x}(x), \end{aligned}$$

also $\mathbf{I} \frac{a}{x}(0+x) \equiv \mathbf{I} \frac{a}{x}(x)$. Gemäss der Definition von $\models$ folgt daraus, dass $\mathbf{I} \frac{a}{x} \models 0 + x = x$. Da a beliebig ist, folgt daraus gemäss der Definition von $\models$, dass $\mathbf{I} \models \forall x(0 + x = x) \equiv \text{KT}_2$. Da j beliebig ist, folgt daraus, dass $\mathbf{M} \models \text{KT}_2$.

- $\mathbf{M} \models \text{KT}_1 \equiv \forall x \forall y(x + y = y + x)$ (Kommutativität der Addition): Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Seien $a, b \in A$. Wir kürzen ab: $J := (\mathbf{I} \frac{a}{x}) \frac{b}{y}$. Es gilt

$$\begin{aligned} J(x + y) &\equiv J(x) + J(y) \\ &\equiv \mathbf{I} \frac{a}{x}(x) + b \\ &\equiv a + b \\ &\equiv b + a \quad (\text{Additionstabelle symmetrisch bzgl. Spiegelung an Diagonale}) \\ &\equiv b + \mathbf{I} \frac{a}{x}(x) \\ &\equiv J(y) + J(x) \\ &\equiv J(y + x), \end{aligned}$$

also $J(x + y) \equiv J(y + x)$. Gemäss der Definition von $\models$ folgt daraus, dass $(\mathbf{I} \frac{a}{x}) \frac{b}{y} = J \models (x + y = y + x)$. Da b beliebig ist, folgt daraus gemäss der Definition von $\models$, dass $\mathbf{I} \frac{a}{x} \models \forall y(x + y = y + x)$. Da a beliebig ist, folgt daraus gemäss der Definition von $\models$, dass $\mathbf{I} \models \forall x \forall y(x + y = y + x) \equiv \text{KT}_1$. Da j beliebig ist, folgt daraus, dass $\mathbf{M} \models \text{KT}_1$.

- $\mathbf{M} \models \text{KT}_3 \equiv \forall x \exists y(y + x = 0)$ (Links-Inverses bzgl. +): Gemäss der Additionstabelle ist für jedes $a \in A$ das Element a ein Links-Inverses von a bzgl. +. Daraus folgt, dass $\mathbf{M} \models \text{KT}_3$. (Überlegen Sie sich das!)

Bemerkung: Kurz gesagt besitzt jedes Element von A ein Links-Inverses bzgl. $+$, da im Tabellenkörper⁴ der Additionstabelle in jeder Spalte eine 0 steht. (Überlegen Sie sich das!)

- $M \models \text{KT}_5 \equiv \forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$ (Kommutativität der Multiplikation): Das folgt daraus, dass die Multiplikationstabelle symmetrisch bzgl. Spiegelung an der Diagonale ist.
- $M \models \text{KT}_6 \equiv \forall x (1 \cdot x = x)$ (Links-Neutralität von 1 bzgl. Multiplikation): Das lässt sich an der 1-Zeile der Multiplikationstabelle ablesen.
- $M \models \text{KT}_7 \equiv \forall x \exists y (x \neq 0 \rightarrow y \cdot x = 1)$ (Links-Inverses bzgl. $\cdot$): Gemäss der Multiplikationstabelle ist $1 \cdot 1 \equiv 1$ und daher 1 ein Links-Inverses von 1. Da $\beta \cdot \alpha \equiv 1$, ist β ein Links-Inverses von α . Da $\alpha \cdot \beta \equiv 1$, ist α ein Links-Inverses von β . Somit besitzt jedes Element ungleich 0 ein Links-Inverses. Daraus folgt, dass $M \models \text{KT}_7$.

Bemerkung: Kurz gesagt besitzt jedes Element von A ungleich 0 ein Links-Inverses bzgl. $\cdot$, da im Tabellenkörper der Multiplikationstabelle in jeder Spalte eine 1 steht, ausser in der 0-Spalte⁵ (Überlegen Sie sich das!)

- $M \models \text{KT}_0 \equiv \forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$ (Assoziativität der Addition): Seien a, b, c Elemente von A .

Fall: (Mindestens) eines der drei Elemente ist gleich 0: Dann gilt $a + (b + c) \equiv (a + b) + c$, da 0 neutral bzgl. $+$ ist. Zum Beispiel gilt nämlich $0 + (b + c) \equiv b + c \equiv (0 + b) + c$.

Fall: Keines der drei Elemente ist gleich 0:

Unterfall: $a \equiv c$: Da gemäss $M \models \text{KT}_1$ Addition kommutativ ist, gilt $a + (b + a) \equiv a + (a + b) \equiv (a + b) + a$, wie gewünscht.

Unterfall: $a \equiv b \neq c$: Wir können die Gleichheit

$$a + (a + c) \equiv (a + a) + c \quad (15)$$

mittels der Additionstabelle für jedes Paar $a \neq c$ überprüfen. (Tun Sie das exemplarisch für $a \equiv 1, c \equiv \alpha$.) Es gibt $3 \cdot 2 = 6$ solche Paare. Für jede der 2 Seiten von (15) müssen wir 2 Additionen in der Tabelle nachschlagen.

Unterfall: $a \neq b \equiv c$: Es gilt:

$$\begin{aligned} a + (b + b) &\equiv (b + b) + a && (M \models \text{KT}_1, \text{Kommutativität der Addition}) \\ &\stackrel{(15)}{\equiv} b + (b + a) \\ &\stackrel{M \models \text{KT}_1}{\equiv} (a + b) + b, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

⁴Das ist die Tabelle ohne Kopfzeile, Kopfspalte und die Zelle mit dem Verknüpfungszeichen $+$.

⁵Für jedes Symbol s in der Kopfzeile (= Zeile ganz oben) meinen wir mit s -Spalte die Spalte der Tabelle, welche die Kopfzeile in der Zelle mit dem Symbol s schneidet.

Unterfall: a, b, c sind alle verschieden: Aus der Additionstabelle folgt:

$$1 + (\alpha + \beta) \equiv 0 \quad \alpha + (\beta + 1) \equiv 0 \quad \beta + (1 + \alpha) \equiv 0 \quad (16)$$

Das Element $a + (b + c)$ ist identisch mit einem dieser drei Elemente. (Falls nötig, vertauschen wir b und c . Das ist wegen $M \models KT_1$ erlaubt.) Ebenso ist das Element $(a + b) + c$ identisch mit einem der drei Elemente in (16), da wir wegen $M \models KT_1$ $(a + b)$ und c vertauschen dürfen. (Falls nötig, vertauschen wir auch a und b .) Daraus folgt, dass $a + (b + c) \equiv 0 \equiv (a + b) + c$, wie gewünscht.

Die obigen Fälle decken alle Möglichkeiten für das Tripel (a, b, c) ab. Somit haben wir $a + (b + c) \equiv (a + b) + c$ in allen Fällen gezeigt. Das beweist $M \models KT_0$.

- $M \models KT_4 \equiv \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$ (Assoziativität der Multiplikation): Seien a, b, c Elemente von A .

Fall: Eines der drei Elemente ist gleich 0: Es gilt $a \cdot (b \cdot c) \equiv 0 \equiv (a \cdot b) \cdot c$, da $0 \cdot u \equiv 0$ für jedes $u \in A$ und wegen $M \models KT_5$ Multiplikation kommutativ ist. Zum Beispiel gilt nämlich $0 \cdot (b \cdot c) \equiv 0 \equiv 0 \cdot c \equiv (0 \cdot b) \cdot c$.

Fall: Eines der drei Elemente ist gleich 1: Es gilt $a \cdot (b \cdot c) \equiv (a \cdot b) \cdot c$, da 1 neutral bzgl. $\cdot$ ist und Multiplikation kommutativ ist. Zum Beispiel gilt nämlich $1 \cdot (b \cdot c) \equiv b \cdot c \equiv (1 \cdot b) \cdot c$.

Fall: Keines der drei Elemente ist gleich 0 oder 1:

Unterfall: $a \equiv c$: Da wegen $M \models KT_5$ Multiplikation kommutativ ist, gilt

$$a \cdot (b \cdot a) \equiv a \cdot (a \cdot b) \equiv (a \cdot b) \cdot a,$$

wie gewünscht.

Unterfall: $a \equiv b \neq c$: Wir können die Gleichheit

$$a \cdot (a \cdot c) \equiv (a \cdot a) \cdot c \quad (17)$$

mittels der Multiplikationstabelle für jedes Paar $a \neq c$ überprüfen. (Tun Sie das exemplarisch für $a \equiv \alpha, c \equiv \beta$.) Es gibt 2 solche Paare, nämlich (α, β) und (β, α) . Für jede der 2 Seiten von (17) müssen wir 2 Multiplikationen in der Tabelle nachschlagen.

Unterfall: $a \neq b \equiv c$: Es gilt:

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot b) &\equiv (b \cdot b) \cdot a && (M \models KT_5, \text{Kommutativität der Addition}) \\ &\stackrel{(17)}{\equiv} b \cdot (b \cdot a) \\ &\stackrel{M \models KT_5}{\equiv} (a \cdot b) \cdot b, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

Die obigen Fälle decken alle Möglichkeiten für das Tripel (a, b, c) ab. Somit haben wir $a \cdot (b \cdot c) \equiv (a \cdot b) \cdot c$ in allen Fällen gezeigt. Das beweist $M \models KT_4$.

Bemerkung: Im Fall, dass keines der drei Elemente gleich 0 ist, ist der obige Beweis von $I \models KT_4$ analog zum Beweis von $I \models GT_0$ in der Lösung zur Aufgabe 0.a. Das neutrale Element 1 spielt dabei die Rolle des neutralen Elementes e . Die Multiplikation $\cdot$ spielt die Rolle der Verknüpfung $\circ$.

- $M \models KT_8 \equiv \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))$ (Multiplikation ist links-distributiv über Addition): Seien $a, b, c \in A$.

Fall: $a \equiv 0$: Gemäss der Additions- und Multiplikationstabelle gilt:

$$0 \cdot (b + c) \equiv 0 \equiv 0 + 0 \equiv 0 \cdot b + 0 \cdot c$$

Fall: $a \equiv 1$: Gemäss der Additions- und Multiplikationstabelle gilt:

$$1 \cdot (b + c) \equiv b + c \equiv 1 \cdot b + 1 \cdot c$$

Fall: $b \equiv 0$: Gemäss der Additions- und Multiplikationstabelle gilt:

$$a \cdot (0 + c) \equiv a \cdot c \equiv 0 + a \cdot c \equiv a \cdot 0 + a \cdot c$$

Fall: $b \equiv c$: Gemäss der Additions- und Multiplikationstabelle gilt:

$$a \cdot (b + b) \equiv a \cdot 0 \equiv 0 \equiv u + u, \quad u := a \cdot b$$

Fall: $a \equiv \alpha$ oder β :

Unterfall (*): $(b \equiv 1 \text{ und } c \equiv \alpha \text{ oder } \beta) \text{ oder } (b, c) \equiv (\alpha, \beta)$:
Wir können die Gleichheit

$$a \cdot (b + c) \equiv a \cdot b + a \cdot c \tag{18}$$

für jedes solche Tripel (a, b, c) mittels der Additions- und Multiplikationstabelle überprüfen. (Tun Sie das exemplarisch für $(a, b, c) \equiv (\alpha, 1, \alpha)$!)

Unterfall: $(b \equiv \alpha \text{ oder } \beta \text{ und } c \equiv 1) \text{ oder } (b, c) \equiv (\beta, \alpha)$:

Die Gleichheit (18) folgt aus dem Unterfall (*) und Kommutativität der Addition, indem wir b und c vertauschen.

Die obigen Fälle decken alle Möglichkeiten für das Tripel (a, b, c) ab. Somit haben wir die Gleichheit (18) in allen Fällen gezeigt. Das beweist $M \models KT_8$.

Somit haben wir $M \models KT$ gezeigt, d. h., (A, M) ist ein Modell der Körpertheorie KT .

1. **(semantischer Beweis, GÖDELSCHER VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ)** Seien $\mathcal{L}$ eine Signatur, T eine Menge von $\mathcal{L}$ -Sätzen und σ ein $\mathcal{L}$ -Satz. Ein *semantischer Beweis* der Aussage $T \vdash \sigma$ ist ein Beweis dieser Aussage mittels des GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZES. Dazu zeigen wir, dass σ in jedem Modell von T wahr ist.

- (a) (*) ($1 + 1 = 2$) Zeigen Sie das Folgende mittels eines semantischen Beweises:

$$\mathbf{PA} \vdash s0 + s0 = ss0 \quad (19)$$

Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie im Beweis einer PROPOSITION in der Vorlesung (Links inverses in Gruppe ist Rechts inverses) vor:

Sei (A, M) ein Modell von $\mathbf{PA}$. Sei j eine Variablenbelegung in A . Wir definieren $\mathbf{I} := (M, j)$. Wir schreiben:

$$0 \equiv 0^M \quad s \equiv s^M \quad + \equiv +^M \quad J := (\mathbf{I} \frac{s(0)}{x}) \frac{0}{y} \quad (20)$$

- i. Schreiben Sie $J(x + sy)$ mittels $0, s, +$ aus.
- ii. Verwenden Sie unsere Annahme $\mathbf{I} \models \mathbf{PA}_i$ für ein bestimmtes $i \in \{0, \dots, 6\}$, um zu zeigen, dass

$$J(x + sy) \equiv s(s(0) + 0). \quad (21)$$

Verwenden Sie unsere Annahme $\mathbf{I} \models \mathbf{PA}_i$ für ein bestimmtes $i \in \{0, \dots, 6\}$, um zu zeigen, dass

$$s(0) + 0 \equiv s(0). \quad (22)$$

- iii. Folgern Sie aus 1.(a)i, (21,22), dass

$$s(0) + s(0) \equiv s(s(0)).$$

- iv. Folgern Sie daraus, dass $M \models s0 + s0 = ss0$.
- v. Verwenden Sie ein KOROLLAR zum GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ.

Lösung:

Sei (A, M) ein Modell von $\mathbf{PA}$. Sei j eine Variablenbelegung in A . Wir definieren $\mathbf{I} := (M, j)$. Wir verwenden die Abkürzungen (20). Da $M \models \mathbf{PA}_3$, gilt $\mathbf{I} \models \mathbf{PA}_3 := \forall x \forall y (x + sy = s(x + y))$ und daher

$$J \models x + sy = s(x + y), \quad \text{d. h.} \quad J(x + sy) \equiv J(s(x + y)). \quad (23)$$

Es gilt:

$$J(x + sy) \equiv J(x) + s(J(y)) \equiv s(0) + s(0) \equiv \mathbf{I}(s0 + s0) \quad (24)$$

$$J(s(x + y)) \equiv s(J(x) + J(y)) \equiv s(s(0) + 0). \quad (25)$$

Da $M \models \mathbf{PA}_2$, gilt $\mathbf{I} \models \mathbf{PA}_2 := \forall x (x + 0 = x)$ und daher

$$\mathbf{I} \frac{s(0)}{x} \models x + 0 = x, \quad \text{also} \quad s(0) + 0 \equiv \mathbf{I} \frac{s(0)}{x} (x + 0) \equiv \mathbf{I} \frac{s(0)}{x} (x) \equiv s(0).$$

Indem wir das in (25) einsetzen, erhalten wir

$$J(s(x + y)) \equiv s(s(0)) \equiv \mathbf{I}(ss0).$$

Indem wir das mit (23,24) kombinieren, erhalten wir $\mathbf{I}(s0 + s0) \equiv \mathbf{I}(ss0)$, d. h.

$$\mathbf{I} \models s0 + s0 = ss0.$$

Da j beliebig ist, folgt daraus, dass

$$M \models s0 + s0 = ss0.$$

Da $M \models \mathbf{PA}$ beliebig ist, folgt darum mittels eines KOROLLARS zum GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ aus der Vorlesung, dass

$$\mathbf{PA} \vdash s0 + s0 = ss0.$$

- (b) Vergleichen Sie Ihren Beweis mit dem *formalen* Beweis von (19), den Sie in Übungsreihe 3 durchgeführt haben. Welcher Beweis erscheint Ihnen intuitiver und einfacher?
- (c) Zeigen Sie mittels eines semantischen Beweises, dass gilt:

$$\text{PA} \vdash \forall x(0 + x = x) \quad (26)$$

Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie in Aufgabe 1.a vor:

Sei (A, M) ein Modell von PA . Sei j eine Variablenbelegung in A . Wir definieren $\mathbf{I} := (M, j)$. Wir betrachten die $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ -Formel

$$\varphi := 0 + x = x.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbf{I} \models \varphi(x/0) \quad (27)$$

$$\text{Für jedes } a \in A \text{ gilt: } \mathbf{I} \stackrel{a}{x} \models \varphi \Rightarrow \mathbf{I} \stackrel{a}{x} \models \varphi(x/sx). \quad (28)$$

Hinweis für (27): Verwenden Sie unsere Annahme $\mathbf{I} \models \text{PA}_i$ für ein bestimmtes $i \in \{0, \dots, 6\}$.

Hinweise für (28):

- Nehmen Sie an, dass $\mathbf{I} \stackrel{a}{x} \models \varphi$ gilt.
- Schreiben Sie $\mathbf{I} \stackrel{a}{x} \models \varphi$ und $\mathbf{I} \stackrel{a}{x} \models \varphi(x/sx)$ mittels $0, s, +$ aus.
- Verwenden Sie unsere Annahme $\mathbf{I} \models \text{PA}_3$, um den Ausdruck $0 + s(a)$ umzuschreiben.
- Verwenden Sie das ausgeschriebene $\mathbf{I} \stackrel{a}{x} \models \varphi$.
- Folgern Sie, dass $\mathbf{I} \stackrel{a}{x} \models \varphi(x/sx)$ gilt.

Verwenden Sie (27,28) und unsere Annahme $\mathbf{I} \models \text{PA}_6$, um zu zeigen, dass $\mathbf{I} \models \forall x \varphi$ gilt.

Wie erhalten wir jetzt (26)?

Lösung:

Sei (A, M) ein Modell von PA . Sei j eine Variablenbelegung in A . Wir definieren $\mathbf{I} := (M, j)$. Wir betrachten die $\mathcal{L}_{\text{PA}}$ -Formel

$$\varphi := 0 + x = x.$$

Da $\mathbf{I} \models \text{PA}_2$, gilt $\mathbf{I} \models \text{PA}_2 \equiv \forall x(x + 0 = x)$ und daher

$$\mathbf{I} \stackrel{0}{x} \models x + 0 = x, \quad \text{also} \quad 0 + 0 \equiv \mathbf{I} \stackrel{0}{x}(x + 0) \equiv \mathbf{I} \stackrel{0}{x}(x) \equiv 0,$$

$$\text{d. h.} \quad \mathbf{I} \models \varphi(x/0). \quad (29)$$

Sei $a \in A$ so, dass

$$\mathbf{I} \stackrel{a}{x} \models \varphi, \quad \text{also} \quad 0 + a \equiv \mathbf{I} \stackrel{a}{x}(0 + x) \equiv \mathbf{I} \stackrel{a}{x}(x) \equiv a. \quad (30)$$

Behauptung 1 *Es gilt $\mathbf{I} \stackrel{a}{x} \models \varphi(x/sx)$.*

Beweis der Behauptung 1: Da $\mathbf{M} \models \mathbf{PA}_3$, gilt $\mathbf{I} \models \mathbf{PA}_3 \equiv \forall x \forall y (x + s y = s(x + y))$ und daher

$$(\mathbf{I} \frac{0}{x}) \frac{a}{y} (x + s y) \equiv (\mathbf{I} \frac{0}{x}) \frac{a}{y} (s(x + y)) \quad (31)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \frac{a}{x} (0 + s x) &\equiv \mathbf{0} + s(a) \\ &\equiv (\mathbf{I} \frac{0}{x}) \frac{a}{y} (x + s y) \\ (\mathbf{I} \frac{0}{x}) \frac{a}{y} (s(x + y)) &\equiv s(\mathbf{0} + a) \\ &\equiv s(a) \quad (\text{wegen (30)}) \\ &\equiv \mathbf{I} \frac{a}{x} (s x). \end{aligned}$$

Indem wir das mit (31) kombinieren, erhalten wir $\mathbf{I} \frac{a}{x} (0 + s x) \equiv \mathbf{I} \frac{a}{x} (s x)$ und daher

$$\mathbf{I} \frac{a}{x} \models 0 + s x = s x \equiv \varphi(x/s x).$$

Das beweist Behauptung 1. $\square$

Da $\mathbf{M} \models \mathbf{PA}_6$, gilt $\mathbf{I} \models \mathbf{PA}_6 : \left(\varphi(x/0) \wedge \forall x (\varphi \rightarrow \varphi(x/s x)) \right) \rightarrow \forall x \varphi$, d. h.:

Falls $\mathbf{I} \models \varphi(x/0)$ und für jedes $a \in A$ gilt, dass $\mathbf{I} \frac{a}{x} \models \varphi \Rightarrow \mathbf{I} \frac{a}{x} \models \varphi(x/s x)$, dann gilt $\mathbf{I} \models \forall x \varphi$.

Mittels (29) und Behauptung 1 folgt daraus, dass

$$\mathbf{I} \models \forall x \varphi \equiv \forall x (0 + x = x).$$

Da j beliebig ist, folgt daraus, dass

$$\mathbf{M} \models \forall x (0 + x = x).$$

Da $\mathbf{M} \models \mathbf{PA}$ beliebig ist, folgt daraus mittels eines KOROLLARS zum GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ, dass

$$\mathbf{PA} \vdash \forall x (0 + x = x).$$

- (d) Vergleichen Sie Ihren Beweis mit dem *formalen* Beweis von (26), den wir in der Vorlesung durchgeführt haben. Welcher Beweis erscheint Ihnen intuitiver und einfacher?

2. (*) (**Konsistenz einer Theorie, Existenz eines Modells, KORREKTHEITSSATZ, GÖDELSCHER VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ**) Sei $\mathcal{L}$ eine Signatur und Φ eine Menge von $\mathcal{L}$ -Formeln. Wir nennen Φ *inkonsistent* g. d. w. es eine $\mathcal{L}$ -Formel φ gibt, sodass gilt:

$$\Phi \vdash \varphi \wedge \neg \varphi$$

Andernfalls nennen wir Φ *konsistent*. Sei jetzt $\mathbf{T}$ eine Menge von $\mathcal{L}$ -Sätzen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbf{T} \text{ ist genau dann konsistent, wenn es ein Modell besitzt.} \quad (32)$$

Hinweise zu “ $\Leftarrow$ ”: Wir nehmen an, dass $\mathbf{T}$ ein Modell $(A, \mathbf{M})$ besitzt. Sei φ eine Formel.

- Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbf{M} \not\models \varphi \wedge \neg\varphi$$

Wählen Sie dazu eine Variablenbelegung j in A .

- Verwenden Sie den KORREKTHEITSSATZ.

Hinweise zu “ $\Rightarrow$ ”: Wir nehmen an, dass $\mathbf{T}$ konsistent ist. Wir definieren $\sigma := \neg\forall x(x = x)$.

Behauptung:

$$\mathbf{T} \not\models \sigma \tag{33}$$

Hinweise zum Beweis dieser Behauptung:

- Zeigen Sie, dass gilt: $\vdash \forall x(x = x)$
- Nehmen Sie widerspruchswise an, dass $\mathbf{T} \vdash \sigma$. Kombinieren Sie das mit 2.a und einer Aufgabe aus Übungsserie 2 (Konjunktion, Existenz), um zu zeigen, dass $\mathbf{T}$ einen Widerspruch beweist.

Aus (33) folgt, dass $\mathbf{T}$ ein Modell besitzt. Wie?

Lösung:

“ $\Leftarrow$ ”: Wir nehmen an, dass $\mathbf{T}$ ein Modell $(A, \mathbf{M})$ besitzt. Sei φ eine Formel. Wir wählen eine Variablenbelegung j in A . (j existiert, da A per definitionem nichtleer ist.) Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Es gilt

$$\text{NICHT } \left(\mathbf{I} \models \varphi \quad \text{UND} \quad \text{NICHT } \mathbf{I} \models \varphi \right)$$

Gemäss der Definition von $\models$ bedeutet das, dass

$$\mathbf{I} \not\models \varphi \wedge \neg\varphi.$$

Daraus folgt, dass

$$\mathbf{M} \not\models \varphi \wedge \neg\varphi.$$

Aus dem Kontraponierten des KORREKTHEITSSATZES folgt daher, dass

$$\mathbf{T} \not\models \varphi \wedge \neg\varphi.$$

Da φ beliebig ist, folgt daraus, dass $\mathbf{T}$ konsistent ist. Das beweist “ $\Leftarrow$ ”.

“ $\Rightarrow$ ”: Wir nehmen an, dass $\mathbf{T}$ konsistent ist. Wir definieren:

$$\sigma := \neg\forall x(x = x)$$

Behauptung 1

$$\mathbf{T} \not\models \sigma$$

Beweis der Behauptung 1: Aus $L_{14} := \tau = \tau$ folgt mit $\tau \equiv x$ und Verallgemeinerung ($\forall$) die Formel $\forall x(x = x)$. Falls auch $\mathbf{T} \vdash \sigma$ gilt, dann folgt mittels einer Aufgabe aus Übungsserie 2 (Konjunktion, Existenz), dass

$$\mathbf{T} \vdash \forall x(x = x) \wedge \neg\forall x(x = x),$$

also, dass $\mathbf{T}$ inkonsistent ist. Daher gilt $\mathbf{T} \not\models \sigma$. Das beweist die Behauptung 1. $\square$

Aus Behauptung 1 und dem GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ folgt, dass $\mathbf{T}$ ein Modell besitzt. Das beweist die Implikation “ $\Rightarrow$ ”.

3. (**Existenz eines Rechts-Inversen impliziert nicht Existenz eines Links-Inversen.**) Wir betrachten die Signatur $\mathcal{L}_{GT} := \{e, \circ\}$ und die Axiome:

$$GT_0 \equiv \forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$$

$$GT_1 \equiv \forall x (e \circ x = x)$$

$$\sigma : \equiv \forall x \exists y (x \circ y = e)$$

(GT_0 und GT_1 sind Axiome der Gruppentheorie.) Wir definieren die Theorie $T := \{GT_0, GT_1, \sigma\}$.

Bemerkungen:

- Intuitiv besagt σ , dass jedes Objekt x ein *Rechtsinverses* besitzt.
- Es gilt $\sigma \neq GT_2 \equiv \forall x \exists y (y \circ x = e)$. Intuitiv besagt das Axiom GT_2 , dass jedes Objekt x ein *Linksinverses* besitzt.

Seien e und α zwei Objekte. Wir definieren $A := \{e, \alpha\}$ und die Funktion $\circ : A^2 \rightarrow A$ durch

$$a \circ b := \circ(a, b) := b, \quad \text{für alle } a, b \in A.$$

Wir definieren die Abbildung M auf $\mathcal{L}_{GT}$ durch

$$e^M := M(e) := e, \quad \circ^M := M(\circ) := \circ.$$

Das Paar $M := (A, M)$ ist eine $\mathcal{L}_{GT}$ -Struktur.

- Zeigen Sie: $M \models T$
- Zeigen Sie: $M \not\models GT_2$

Bemerkungen:

- Für jedes Modell G der Gruppentheorie GT gilt, dass $G \models \sigma$. (Das folgt daraus, dass G eine Gruppe ist und darum in G jedes Linksinverse ein Rechtsinverses ist.) Aus dem GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ folgt daher, dass $GT \vdash \sigma$ und daher

$$GT \vdash T,$$

d. h., die Gruppentheorie beweist T .

- Gemäss (a,b) ist M ein Modell von T , aber kein Modell von GT_2 . Aus der Kontraposition des KORREKTHEITSSATZES folgt daher, dass $T \not\models GT_2$ und daher

$$T \not\models GT,$$

d. h., die Theorie T beweist die Gruppentheorie.

- Falls wir in T das Axiom GT_1 durch das Axiom e ist (*links- und rechts-neutral*) ersetzen, dann beweist die abgeänderte Theorie die Gruppentheorie. Genauer gesagt betrachten wir das Axiom

$$\tau := \forall x (e \circ x = x \wedge x \circ e = x).$$

Es gilt:

$$\tilde{T} := \{GT_0, \tau, \sigma\} \vdash GT$$

Für jedes Modell M von $\tilde{T}$ gilt nämlich $M \models \{GT_1, GT_2\}$ und daher $M \models GT$. (Überlegen Sie sich das!) Aus dem GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ folgt daher, dass $\tilde{T} \vdash GT$, wie behauptet.

Lösung:

- (a) – (GT_0 , Assoziativität) Für alle $a, b, c \in \{e, \alpha\}$ gilt:

$$a \circ (b \circ c) \equiv (b \circ c) \equiv c \equiv (a \circ b) \circ c$$

Daraus folgt $\mathbf{M} \models \text{GT}_0$. (Warum?)

- (GT_1 , linke Neutralität) Da $e \circ e \equiv e$ und $e \circ \alpha \equiv \alpha$, ist e linksneutral. Daraus folgt, dass $\mathbf{M} \models \text{GT}_1$. (Warum?)

- (σ , Rechtsinverses) Da $e \circ e \equiv e$, besitzt e ein Rechtsinverses. Da $\alpha \circ e \equiv e$, besitzt α ein Rechtsinverses. Daraus folgt, dass $\mathbf{M} \models \sigma$. (Warum?)

Das zeigt, dass $\mathbf{M} \models \mathbf{T}$.

- (b) Da $e \circ \alpha \equiv \alpha$ und $\alpha \circ \alpha \equiv \alpha$, besitzt α kein Linksinverses. Daraus folgt, dass $\mathbf{M} \not\models \text{GT}_2$ und daher, dass $\mathbf{M} \not\models \text{GT}$. (Warum?)