Musterlösung Serie 6

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0. **(∗) (leere Menge)** Wir betrachten die Signatur $\mathscr{L}_{\mathrm{ZF}} = \{\in\}$. Zeigen Sie, dass aus dem Extensionalitätsaxiom ZF_1 folgt, dass die leere Menge eindeutig ist, d. h.:

$$\mathsf{ZF}_1 \vdash \forall x \forall y \Big(\forall z (z \notin x) \wedge \forall z (z \notin y) \to x = y \Big) \tag{1}$$

Hinweise:

- Zeigen Sie das mittels eines semantischen Beweises wie folgt. Sei $(A, \mathbf{M}) \models \mathsf{T} := \{\mathsf{ZF}_1\}$ ein Modell. Wir schreiben:
$$\boldsymbol{\in} :\equiv \in^{\mathbf{M}}$$
Seien $a, b \in A$ so, dass gilt:
$$\text{Für jedes } c \text{ in } A \text{ gilt nicht } c \boldsymbol{\in} a \text{ und für jedes } c \text{ in } A \text{ gilt nicht } c \boldsymbol{\in} b.$$
- Überlegen Sie sich, dass gilt:
$$\text{Für jedes } c \text{ in } A \text{ gilt: } c \boldsymbol{\in} a \text{ genau dann, wenn } c \boldsymbol{\in} b$$
- Verwenden Sie ZF_1.

Lösung: Sei $(A, \mathbf{M}) \models \mathsf{T} := \{\mathsf{ZF}_1\}$ ein Modell. Seien $a, b \in A$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } c \text{ in } A \text{ gilt nicht } c \boldsymbol{\in} a \text{ und für jedes } c \text{ in } A \text{ gilt nicht } c \boldsymbol{\in} b.$$

Sei c in A. Dann gilt nicht $c \boldsymbol{\in} a$ und nicht $c \boldsymbol{\in} b$. Also gilt $c \boldsymbol{\in} a \Leftrightarrow c \boldsymbol{\in} b$. Da $\mathbf{M}$ ein Modell von $\mathsf{ZF}_1 :\equiv \forall x \forall y \Big(\forall z \big(z \in x \leftrightarrow z \in y \big) \to x = y \Big)$ ist, folgt daraus, dass $a \equiv b$. Daraus folgt, dass

$$\mathbf{M} \models \forall x \forall y \Big(\forall z (z \notin x) \wedge \forall z (z \notin y) \to x = y \Big).$$

Da $\mathbf{M} \models \mathsf{T}$ beliebig ist, folgt daraus mittels eines KOROLLARS zum GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ, dass (1) gilt.

1. **(Kuratowskis Definition eines geordneten Paares)** Wir definieren das 2-stellige Funktionssymbol $\{\}$ durch den Satz

$$\sigma_{\{\}} :\equiv \forall x \forall y \forall z \Big(z \in \{\}xy \leftrightarrow \big(z = x \vee z = y \big) \Big). \tag{2}$$

Für die bessere Lesbarkeit schreiben wir

$$\{x, y\}$$

für $\{\}xy$. Wir definieren das einstellige Funktionssymbol $\{\}_1$ durch den Satz

$$\forall x\big(\{\}_1 x = \{x, x\}\big). \tag{3}$$

Für die bessere Lesbarkeit schreiben wir

$$\{x\}$$

für $\{\}_1 x$. Wir definieren das 2-stellige Funktionssymbol $\langle\rangle$ durch den Satz

$$\sigma_{\langle\rangle} :\equiv \forall x \forall y \Big(\langle\rangle xy = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}\Big). \tag{4}$$

für $\langle\rangle xy$. Für die bessere Lesbarkeit schreiben wir

$$\langle x, y\rangle$$

für $\langle\rangle xy$. Wir nennen $\langle x, y\rangle$ das aus x und y bestehende *geordnete Paar*. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathsf{T} := \big\{\sigma_{\{\}}, \sigma_{\{\}_1}, \sigma_{\langle\rangle}\big\} \vdash \forall x \forall y \forall x' \forall y' \Big(\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle \leftrightarrow x = x' \wedge y = y'\Big) \tag{5}$$

Hinweise:

- Zeigen Sie das mittels eines semantischen Beweises wie folgt. Sei $(A, \mathbf{M}) \models \mathsf{T}$ ein Modell. Wir schreiben:

$$\boldsymbol{\in} \quad \boldsymbol{\{\}} \quad \boldsymbol{\{\}}_1 \quad \boldsymbol{\langle\rangle} \qquad \text{für} \qquad \in^{\mathbf{M}} \quad \{\}^{\mathbf{M}} \quad \{\}_1^{\mathbf{M}} \quad \langle\rangle^{\mathbf{M}} \tag{6}$$

- Seien a, b, a', b' in A, sodass

$$\boldsymbol{\langle} a,b \boldsymbol{\rangle} \equiv \boldsymbol{\langle} a',b' \boldsymbol{\rangle}.$$

  Zeigen Sie, dass gilt:

$$a \equiv a'$$

  Betrachten Sie dazu die folgenden Fälle:

  - $\boldsymbol{\{} a \boldsymbol{\}} :\equiv \boldsymbol{\{\}}_1(a) \equiv \boldsymbol{\{} a' \boldsymbol{\}}$
  - $\boldsymbol{\{} a \boldsymbol{\}} \equiv \boldsymbol{\{} a',b' \boldsymbol{\}} :\equiv \boldsymbol{\{\}}(a', b')$

  Zeigen Sie, dass gilt:

$$b \equiv b'$$

  Betrachten Sie dazu die folgenden Fälle und verwenden Sie, dass $a \equiv a'$.

  - $\boldsymbol{\{} a,b \boldsymbol{\}} \equiv \boldsymbol{\{} a',b' \boldsymbol{\}}$

    Unterfälle:
    $b \equiv b'$
    $b \equiv a'$
  - $\boldsymbol{\{} a,b \boldsymbol{\}} \equiv \boldsymbol{\{} a' \boldsymbol{\}}$

Lösung: Sei $(A,\mathbf{M}) \models \mathsf{T}$ ein Modell. Wir verwenden die Abkürzungen (6). Seien a, b, a', b' in A, sodass

$$\langle a,b \rangle \equiv \langle a',b' \rangle. \tag{7}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \{\{a\},\{a,b\}\} &\equiv \langle a,b \rangle \qquad \text{(wegen (4))} \\ &\equiv \langle a',b' \rangle \qquad \text{(wegen unserer Annahme (7))} \\ &\equiv \{\{a'\},\{a',b'\}\} \qquad \text{(wegen (4))} \end{aligned} \tag{8}$$

Behauptung:

$$a \equiv a' \tag{9}$$

Beweis:

Fall: $\{a\} :\equiv \{\}_1(a) \equiv \{a'\}$: Es gilt:

$$\begin{aligned} a \in \{a,a\} & \qquad \text{(wegen (2))} \\ \equiv \{a\} & \qquad \text{(wegen (3))} \\ \equiv \{a'\} & \qquad \text{(gemäss unserer Annahme)} \\ \equiv \{a',a'\} & \qquad \text{(wegen (3)).} \end{aligned}$$

Mittels (2) folgt daraus, dass $a \equiv a'$, wie behauptet.

Fall: $\{a\} \equiv \{a',b'\} :\equiv \{\}(a',b')$: Analog zu oben gilt dann $a' \in \{a\}$ und daher $a' \equiv a$.

Aus (8) folgt, dass

$$\{a\} \equiv \{a'\} \qquad \text{oder} \qquad \{a\} \equiv \{a',b'\}.$$

Die obigen Fälle decken daher alle Möglichkeiten ab. Das beweist die Behauptung (9) in jedem Fall.

Behauptung:

$$b \equiv b' \tag{10}$$

Beweis:

Fall: $\{a,b\} \equiv \{a',b'\}$

Unterfall: $b \equiv b'$: Dann brauchen wir nichts zu zeigen.

Unterfall: $b \equiv a'$: Wegen (9) gilt dann $b \equiv a$ und daher:

$$\begin{aligned} \{b\} &\equiv \{a,b\} \\ &\equiv \{a',b'\} \qquad \text{(gemäss unserer Annahme).} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $b' \in \{b\}$ und daher $b' \equiv b$, wie behauptet. Da $b \in \{a,b\} \equiv \{a',b'\}$, decken die beiden Unterfälle alle Möglichkeiten ab.

Fall: $\{a,b\} \equiv \{a'\}$: Dann gilt

$$b \equiv a' \equiv a \tag{11}$$

und daher

$$\{\{a\},\{a,b\}\} \equiv \{\{a\},\{a\}\} \equiv \{\{a\}\}. \tag{12}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\{a',b'\} \in \{\{a'\},\{a',b'\}\} \\ &\equiv \{\{a\},\{a,b\}\} \qquad \text{(wegen (8))} \\ &\equiv \{\{a\}\} \qquad \text{(wegen (12)).}\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\{a',b'\} \equiv \{a\}$. Daraus folgt, dass $b' \equiv a \equiv b$ (wegen (11)), wie behauptet.

Aus (8) folgt, dass die obigen Fälle alle Möglichkeiten abdecken. Das beweist die Behauptung (10) in jedem Fall. Gemäss (9,10) gilt also $a \equiv a'$ und $b \equiv b'$. Da $\mathbf{M} \models \mathsf{T}$ beliebig ist, folgt daraus mittels eines KOROLLARS zum GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ, dass (5) gilt.

2. **(∗) (“Menge” aller Mengen)** Zeigen Sie, dass aus dem Aussonderungsaxiom ZF_5 folgt, dass die Menge aller Mengen nicht existiert, d. h.:

$$\mathsf{ZF}_5 \vdash \nexists x \forall z (z \in x)$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass eine bestimmte andere Menge nicht existiert.

Lösung: Sei $(A, \mathbf{M})$ ein Modell von ZF_5. **Behauptung:**

$$\mathbf{M} \models \nexists x \forall z (z \in x) \tag{13}$$

Beweis: Wir nehmen widerspruchsweise an, dass (13) nicht gilt. Dann gilt:

$$\mathbf{M} \models \exists x \forall z (z \in x)$$

(Überlegen Sie sich das!) Es gibt daher ein a in A, sodass gilt:

$$\text{Für jedes } c \text{ in } A \text{ gilt:} \qquad c \in a. \tag{14}$$

Aus der Instanz des Aussonderungsaxiomenschemas $\mathsf{ZF}_5 : \forall x \exists y \forall z \Big(z \in y \leftrightarrow \big(z \in x \wedge \varphi \big) \Big)$ mit $\varphi :\equiv z \notin z$ folgt, dass, dass es ein b in A gibt, sodass für jedes c in A gilt:

$$c \in b \qquad \Leftrightarrow \qquad \big(c \in a \quad \text{und} \quad \text{nicht } c \in c \big)$$

Wir wählen ein solches b. Mittels (14) erhalten wir:

$$c \in b \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{nicht} \quad c \in c$$

Daraus erhalten wir mittels des KORREKTHEITSSATZES einen Widerspruch zu einem THEOREM aus der Vorlesung (Russelsche Antinomie). Also gilt (13). Da das Modell $\mathbf{M} \models \mathsf{ZF}_5$ beliebig ist, folgt mittels eines KOROLLARS zum GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ, dass

$$\mathsf{ZF}_5 \vdash \nexists x \forall z (z \in x).$$

3. **(Menge (?) aller Einpunktmengen)** Existiert unter der Annahme der bisher behandelten Zermelo-Fraenkel-Axiome (bis ZF_5) die Menge aller Einpunktmengen? Eine Einpunktmenge ist eine Menge der Form $\{z\}$, wobei z eine Menge ist.

Lösung: Nein. Es gilt nämlich:

THEOREM: $\{\mathsf{ZF}_3, \mathsf{ZF}_5\} \vdash \nexists x \forall z(\{z\} \in x)$

Erinnerung: Vereinigungsaxiom:

$$\mathsf{ZF}_3 :\equiv \forall x \exists u \forall z \Big(z \in u \leftrightarrow \exists w \big(w \in x \wedge z \in w \big) \Big)$$

Wir zeigen dieses THEOREM mittels eines semantischen Beweises. Wir lassen bei solchen Beweisen ab jetzt die Teile weg, in denen wir ein vorgegebenes Modell unserer Theorie fixieren und den GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ anwenden. Wir identifizieren auch $\in \equiv \in^{\mathbf{M}}$ mit $\in$ usw. Das bedeutet, dass unser Beweis die in der Mathematik allgemein übliche Form annimmt.

Beweis: Wir nehmen an, dass $\{\mathsf{ZF}_3, \mathsf{ZF}_5\}$ gelten. Wir nehmen widerspruchsweise an, dass eine Menge x existiert, sodass für jede Menge z gilt, dass $\{z\} \in x$. Gemäss ZF_3 gibt es eine Menge u, sodass für jedes z gilt:

$$z \in u \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Es gibt } w \in x \text{, sodass } z \in w. \tag{15}$$

Sei z eine Menge. Dann gilt $z \in w := \{z\} \in x$. Gemäss (15) gilt daher $z \in u$. Das heisst, u ist die Menge aller Mengen. Gemäss Aufgabe **2**. und unserer Annahme ZF_5 existiert diese Menge nicht. Das ergibt einen Widerspruch. Daher war unsere Annahme, dass eine Menge x wie oben existiert, falsch. Das beweist das THEOREM.

4. **($*$) (Durchschnitt zweier Mengen ist eine Menge)** Wir definieren die Formel

$$\psi :\equiv z \in x \wedge z \in y.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathsf{T} := \big\{\mathsf{ZF}_0, \ldots, \mathsf{ZF}_5\big\} \vdash \forall x \forall y \exists u \forall z \big(z \in u \leftrightarrow \psi \big) \tag{16}$$

$$\mathsf{T} \vdash \forall x \forall y \forall u \forall v \Big(\forall z \big(z \in u \leftrightarrow \psi \big) \wedge \forall z \big(z \in v \leftrightarrow \psi \big) \rightarrow u = v \Big) \tag{17}$$

Bemerkung zur Relevanz: Wir definieren das *zweistellige Durchschnittssymbol* als das zweistellige Funktionssymbol $\cap$ durch den Satz

$$\forall x \forall y \forall z \big(z \in x \cap y \leftrightarrow z \in x \wedge z \in y \big).$$

Gemäss (16,17) ist $\cap$ wohldefiniert, d. h., für jedes Paar von Mengen x, y gibt es eine eindeutige Menge $u = x \cap y$, sodass für jedes z die Formel ψ gilt.

Lösung: Wir nehmen an, dass $\mathsf{ZF}_0, \ldots, \mathsf{ZF}_5$ gelten.

(16): Seien x, y Mengen. Gemäss ZF_5 mit $\varphi :\equiv z \in y$ gibt es eine Menge u, sodass für jedes z gilt:

$$z \in u \qquad \text{g. d. w.} \qquad z \in x \quad \text{und} \quad \varphi$$

Das zeigt (16).

(17): Seien x, y, u, v Mengen, sodass gilt:

$$\text{Für jedes } z \text{ gilt} \quad z \in u \quad \text{g. d. w.} \quad \psi \qquad \text{und} \qquad \text{für jedes } z \text{ gilt} \quad z \in v \quad \text{g. d. w.} \quad \psi.$$

Dann gilt:

$$\text{Für jedes } z \text{ gilt} \quad z \in u \quad \text{g. d. w.} \quad z \in v.$$

Wegen ZF_1 gilt darum $u = v$. Das zeigt (17).

5. **(symmetrische Differenz ist eine Menge)**

(a) Wir definieren die Formel

$$\psi :\equiv \big(z \in x \vee z \in y\big) \wedge \neg\big(z \in x \wedge z \in y\big).$$

Seien x, y Mengen. Wir definieren die *symmetrische Differenz* von x und y naiv als

$$x \triangle y := \{z \mid \psi\}. \tag{18}$$

Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm dieser Menge.

Bemerkung: Wir betrachten eine Formel φ, in der genau z frei vorkommt. Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, existiert die Menge $\{z \mid \varphi\}$ nicht immer. Das gilt gemäss der Russellschen Antinomie zum Beispiel für $\varphi :\equiv z \notin z$. Wir werden jedoch gleich sehen, dass die Menge (18) tatsächlich existiert.

(b) Überlegen Sie sich anhand des Venn-Diagramms, dass gilt:

$$x \triangle y = (x \backslash y) \cup (y \backslash x)$$

($x \backslash y$ ist die Differenzmenge von x und y.)

(c) Wir schreiben $\mathsf{T} := \big\{\mathsf{ZF}_0, \ldots, \mathsf{ZF}_5\big\}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathsf{T} \vdash \forall x \forall y \exists u \forall z \big(z \in u \leftrightarrow \psi\big) \tag{19}$$

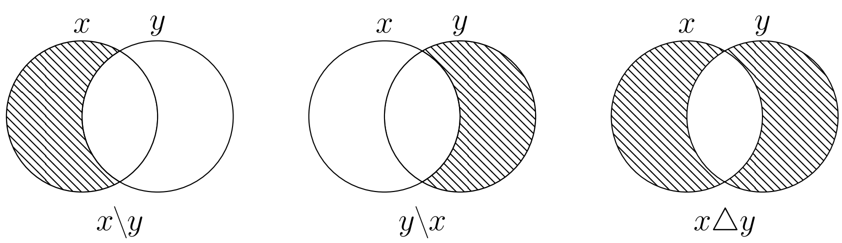
$$\mathsf{T} \vdash \forall x \forall y \forall u \forall v \Big(\forall z \big(z \in u \leftrightarrow \psi\big) \wedge \forall z \big(z \in v \leftrightarrow \psi\big) \to u = v\Big) \tag{20}$$

Bemerkung zur Relevanz: Wir definieren das *symmetrische Differenzsymbol* als das zweistellige Funktionssymbol $\triangle$ durch den Satz

$$\forall x \forall y \forall z \big(z \in x \triangle y \leftrightarrow \psi\big).$$

Gemäss (19,20) ist $\triangle$ wohldefiniert, d. h., für jedes Paar von Mengen x, y gibt es eine eindeutige Menge $u = x \triangle y$, sodass für jedes z die Formel φ gilt.

Lösung: Es folgen Venn-Diagramms der Mengen $x \backslash y$, $y \backslash x$, $x \triangle y$. Man kann beobachten, dass die Vereinigung der ersten beiden Mengen die dritte Menge ist.



5.c: Wir nehmen an, dass $\mathsf{ZF}_0, \ldots, \mathsf{ZF}_5$ gelten.

(19): Seien x, y Mengen. Gemäss dem Paarmengenaxiom ZF_2 und ZF_1 existiert eine eindeutige Paarmenge $\{x, y\}$. Gemäss dem Vereinigungsaxiom ZF_3 und ZF_1 existiert eine eindeutige Vereinigungsmenge $\bigcup\{x, y\} = x \cup y$. Gemäss dem Aussonderungsaxiom ZF_5 existiert die Menge

$$u := \big\{z \in x \cup y \,\big|\, \neg\big(z \in x \wedge z \in y\big)\big\}.$$

Für diese Menge gilt:

$$\text{Für jedes } z \text{ gilt} \quad z \in u \quad \text{g. d. w.} \quad \psi.$$

Die Menge u besitzt daher die gewünschte Eigenschaft. Das zeigt (19).

(20): Seien x, y, u, v Mengen, sodass gilt:

$$\text{Für jedes } z \text{ gilt} \quad z \in u \quad \text{g. d. w.} \quad \psi \qquad \text{und} \qquad \text{für jedes } z \text{ gilt} \quad z \in v \quad \text{g. d. w.} \quad \psi.$$

Dann gilt:

$$\text{Für jedes } z \text{ gilt} \quad z \in u \quad \text{g. d. w.} \quad z \in v.$$

Wegen ZF_1 gilt darum $u = v$. Das zeigt (20).

6. **(Nichtstandardmodell der Peano-Arithmetik)** Seien $\mathscr{L}_{\mathrm{PA}} = \{0, \mathrm{s}, +, \cdot\}$ die Signatur und PA das Axiomensystem der Peano-Arithmetik. Wir nehmen an, dass die üblichen metamathematischen Regeln, insbesondere das Induktionsprinzip, gelten. Unter dieser Annahme existiert das Standardmodell $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ der PA. (Siehe Übungsserie 4, Modell: Peano-Arithmetik.) Gemäss einem Korollar aus der Vorlesung (Charakterisierung der Konsistenz einer Theorie) ist die PA unter dieser Annahme daher konsistent. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine echte Erweiterung des Modells $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ zu konstruieren.

(a) Seien $\mathscr{L}$ eine Signatur und Φ eine Menge von $\mathscr{L}$-Formeln. Zeigen Sie, dass Φ konsistent ist, wenn jede ENDLICHE Teilmenge davon konsistent ist.

(b) Sei c ein Konstantensymbol. Wir definieren die erweiterte Signatur

$$\mathscr{L}_{\mathrm{PA}^+} := \mathscr{L}_{\mathrm{PA}} \cup \{c\}.$$

Wir definieren die Relationen $\leqslant$ und $<$ auf $\mathbb{N}$ wie in Übungsserie 4 (Relation, Modell: Teiltheorie von DLO). (Diese Relationen haben die übliche Bedeutung.) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die $\mathscr{L}_{\mathrm{PA}^+}$-Formel

$$\varphi_n :\equiv \neg\big(c = \mathrm{s} \cdots \mathrm{s}\, 0\big), \tag{21}$$

wobei das Symbol s auf der rechten Seite genau n-mal vorkommt. Wir definieren das erweiterte Axiomensystem

$$\mathsf{PA}_n := \mathsf{PA} \cup \big\{\varphi_i \,\big|\, i \text{ in } \mathbb{N},\ \mathbf{0} \leqslant i < n\big\}. \tag{22}$$

Zeigen Sie, dass PA_n konsistent ist.

Hinweise:

- Erweitern Sie das Standardmodell $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ der PA zu einem Modell von PA_n.
- Verwenden Sie ein KOROLLAR zum KORREKTHEITSSATZ und GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ aus der Vorlesung.

(c) Zeigen Sie, dass das Axiomensystem $\mathsf{PA}^+ := \mathsf{PA} \cup \{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ konsistent ist.
Hinweis: Verwenden Sie die vorherigen Teilaufgaben.

(d) Zeigen Sie, dass es ein Modell $\mathbf{M}$ der Peano-Arithmetik gibt, das nicht isomorph zum Standardmodell $\mathbb{N}$ ist. Der Begriff der Isomorphie ist wie folgt definiert. Seien $\mathscr{L}$ eine Signatur und $(A, \mathbf{M})$ und $(B, \mathbf{N})$ zwei $\mathscr{L}$-Strukturen. Ein *Isomorphismus zwischen* $\mathbf{M}$ *und* $\mathbf{N}$ ist eine Bijektion $f : A \to B$, sodass gilt:

i. $f(c^{\mathbf{M}}) \equiv c^{\mathbf{N}}$ für jedes Konstantensymbol $c \in \mathscr{L}$

ii. $f\left(F^{\mathbf{M}}(a_1, \ldots, a_n)\right) \equiv F^{\mathbf{N}}\left(f(a_1), \ldots, f(a_n)\right)$ für jedes $n \in \mathbb{N}\backslash\{\mathbf{0}\}$, jedes n-stellige Funktionssymbol $F \in \mathscr{L}$ und alle $a_1, \ldots, a_n$ in A

iii. $\left(a_1, \ldots, a_n\right) \in R^{\mathbf{M}} \Leftrightarrow \left(f(a_1), \ldots, f(a_n)\right) \in R^{\mathbf{N}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}\backslash\{\mathbf{0}\}$, jedes n-stellige Relationssymbol $R \in \mathscr{L}$ und alle $a_1, \ldots, a_n$ in A

Wir nennen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ *isomorph* g. d. w. es Isomorphismus zwischen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ gibt.

Hinweise:

- Aus der letzten Teilaufgabe und einem KOROLLAR zum KORREKTHEITSSATZ und GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ aus der Vorlesung folgt, dass es ein Modell für PA^+ gibt.
- Falls es einen Isomorphismus f zwischen Ihrem gefundenen PA-Modell $(A, \mathbf{M})$ und $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ gibt, betrachten Sie dann $f(a)$ für ein spezielles a in A.

Bemerkungen:

- Ein Modell der PA, das nicht isomorph zum Standardmodell $\mathbb{N}$ ist, heisst *Nichtstandardmodell der PA*. In dieser Aufgabe konstruieren wir also ein solches Nichtstandardmodell.
- Die Peano-Arithmetik beschreibt also nicht nur die Standardmenge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, sondern auch Nichtstandardmengen "natürlicher Zahlen".

Lösung:

(a) Wir verwenden Kontraposition. Dazu nehmen an, dass Φ inkonsistent ist. Dann gibt es eine $\mathscr{L}$-Formel φ und einen Beweis $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ von $\varphi \wedge \neg\varphi$ aus Φ. Wir definieren Ψ als die Menge der Formeln in Φ, die in diesem Beweis verwendet werden. Es gilt

$$\Psi \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$$

Daher ist Ψ inkonsistent. Da der Beweis $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ ENDLICH ist, ist Ψ ENDLICH. Die Menge Φ besitzt daher eine ENDLICHE inkonsistente Teilmenge.

Mittels Kontraposition folgt, dass Φ konsistent ist, falls jede ENDLICHE Teilmenge von davon konsistent ist.

(b) Wir schreiben $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ für das Standardmodell der PA. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir erweitern $\mathbb{N}$ zu einer $\mathscr{L}_{\mathrm{PA}^+}$-Struktur $\mathbb{N}_n$, indem wir definieren

$$c^{\mathbb{N}_n} :\equiv n.$$

Sei i in $\mathbb{N}$, sodass $\mathbf{0} \leqslant i < n$. Dann gilt $n \not\equiv i$ und daher $\mathbb{N}_n \vDash \varphi_i$ (definiert wie in (21)). Da $\mathbb{N}_n \vDash \mathsf{PA}$, folgt, dass $\mathbb{N}_n \vDash \mathsf{PA}_n$ (definiert wie in (22)). Gemäss einem KOROLLAR zum KORREKTHEITSSATZ und GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ ist PA_n daher konsistent.

(c) Für jede endliche Teilmenge $\Psi \subseteq \mathsf{PA}^+$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\Psi \subseteq \mathsf{PA}_n$. Gemäss **6**.b ist Ψ daher konsistent. Gemäss **6**.a ist PA^+ daher konsistent.

(d) Wegen **6**.c und des GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZES besitzt PA^+ ein Modell (A, M^+). Wir definieren M als die Einschränkung $\mathrm{M}^+|_{\mathscr{L}_{\mathrm{PA}}}$. (Das bedeutet, dass wir $c^{\mathbf{M}^+}$ vergessen.) Es gilt $\mathbf{M} := (A, \mathrm{M}) \models \mathsf{PA}$. Wir zeigen, dass $\mathbf{M}$ nicht isomorph zu $\mathbb{N}$ ist. Sei $f : A \to \mathbb{N}$ eine Abbildung, die (**6**.(d)i,**6**.(d)ii,**6**.(d)iii) erfüllt.

Behauptung: f ist nicht injektiv.

Beweis: Wir wählen eine Variablenbelegung j in A. Wir definieren $\mathbf{I}^+ := (\mathbf{M}^+, j)$,

$$a :\equiv c^{\mathbf{M}^+}, \qquad n :\equiv f(a), \qquad b :\equiv \mathbf{I}^+ \left(\mathrm{s} \cdots \mathrm{s}\, 0\right) \equiv \mathrm{s}^{\mathbf{M}} \cdots \mathrm{s}^{\mathbf{M}}\, 0^{\mathbf{M}},$$

wobei das Nachfolgersymbol s n mal vorkommt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(b) &\equiv f\big(\mathrm{s}^{\mathbf{M}} \cdots \mathrm{s}^{\mathbf{M}}\, 0^{\mathbf{M}}\big) \\
&\equiv \mathrm{s}^{\mathbb{N}} \left(f\big(\mathrm{s}^{\mathbf{M}} \cdots \mathrm{s}^{\mathbf{M}}\, 0^{\mathbf{M}}\big)\right) \qquad (\mathrm{s}^{\mathbf{M}} \text{ kommt } n-1 \text{ mal vor. Bedingung } \mathbf{6}.\text{(d)ii.)} \\
&\vdots \\
&\equiv \mathrm{s}^{\mathbb{N}} \circ \cdots \circ \mathrm{s}^{\mathbb{N}} \circ f(0^{\mathbf{M}}) \\
&\equiv \mathbf{s} \cdots \mathbf{s}(0^{\mathbb{N}} \equiv \mathbf{0}) \qquad \text{(wegen (}\mathbf{6}.\text{(d)i))} \\
&\equiv n \\
&\equiv f(a)
\end{aligned} \tag{23}$$

Da $\mathbf{M}^+ \models \mathsf{PA}^+$, gilt $\mathbf{M}^+ \models \varphi_n$ und daher gemäss (21):

$$\mathbf{I}^+(c) \not\equiv \mathbf{I}^+ \left(\mathrm{s} \cdots \mathrm{s}\, 0\right) \equiv b$$

Da $a \equiv c^{\mathbf{M}^+} \equiv \mathbf{I}^+(c)$, folgt, dass $a \not\equiv b$. Indem wir das mit (23) kombinieren, folgt, dass f nicht injektiv ist. Das beweist die Behauptung.

Aus der Behauptung folgt, dass $\mathbf{M}$ und $\mathbb{N}$ nicht isomorph sind.