D-MATH — Grundstrukturen — FS 2024
Dr. Fabian Ziltener

Musterlösung Serie 7

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (*) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0. **(Mengen, Element, Teilmenge, Mengenoperationen)** Seien $n \in \omega$ und $x_0, \dots, x_{n-1}$ Mengen. Wir schreiben

$$\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$$

für die Menge, die genau die Elemente $x_0, \dots, x_{n-1}$ enthält. Wir definieren

$$0 := \varnothing, \qquad 1 := \{0\}, \qquad 2 := \{0, 1\}, \qquad 3 := \{0, 1, 2\}, \qquad \dots$$

(a) **(zeichnen)** Zeichnen Sie die Menge

$$S := \big\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x \geqslant 0 \wedge x \leqslant y \wedge y \leqslant 1\big\}.$$

(Wir werden die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen in der nächsten Woche definieren.)

(b) **(*) (Element, Teilmenge)** Welche der folgenden Aussagen[1] sind wahr?[2] Warum?

i. $\varnothing \in \varnothing$
ii. $\varnothing \in \{\varnothing\}$
iii. $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
iv. $\{1\} \in 3$
v. $\{1\} \subseteq 3$
vi. $2 \subseteq \{1, 2\}$

(c) **(Anzahl Elemente)** Sei S eine endliche Menge. Wir definieren die Anzahl Elemente von S als die eindeutige natürliche Zahl $|S| = n \in \omega$, sodass es eine Bijektion zwischen S und n gibt. (Dass n eindeutig ist, folgt mittels Induktion. Siehe **2**.c.)

Welche Anzahl Elemente besitzen die folgenden Mengen?

i. die leere Menge $\varnothing$
ii. $\{\varnothing\}$
iii. $\{0, 1, 0\}$
iv. $\big\{(-1)^n \,\big|\, n \in \mathbb{Z}\big\} := \big\{m \in \mathbb{Z} \,\big|\, \exists n \in \mathbb{Z}\big(m = (-1)^n\big)\big\}$

(d) **(Lösungsmenge)** Was ist die Lösungsmenge der Gleichung $x - 1 = 0$ über der Menge ω der natürlichen Zahlen?

---

[1] Wir wechseln hier zur in der Mathematik üblichen Sichtweise, dass ein Satz, d. h. eine geschlossene Formel, eine Aussage ist. Das ist nicht wörtlich der Fall. Strikt genommen wird ein Satz erst durch eine Interpretation zu einer Aussage.

[2] Damit meinen wir, dass die Formel in jedem Modell der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre wahr ist.

(e) ($\cup, \bigcup, \cap, \setminus, \triangle$) Bestimmen Sie die Vereinigung $X \cup Y$, den Durchschnitt $X \cap Y$, die Differenz $X \setminus Y$ und die symmetrische Differenz $X \triangle Y$ für die Mengen

$$X := \{0, 1\}, \qquad Y := \{1, 2\}.$$

Bestimmen Sie die Vereinigung

$$\bigcup 2.$$

(f) **($*$) (kartesisches Produkt)**

i. Bestimmen Sie das kartesische Produkt $\{0, 1\} \times \{2, 3\}$.

ii. Sei A eine Menge und $n \in \omega$. Wir definieren die *n-te kartesische Potenz von A* als die Menge

$$A^n := {}^n A = \big\{\text{Funktion } f : n \to A\big\}$$

Bestimmen Sie die kartesische Potenz $\{2, 3\}^2$.

(g) **(Potenzmenge)**

i. **($*$)** Bestimmen Sie die Potenzmenge

$$\mathcal{P}(2) := \mathcal{P}2.$$

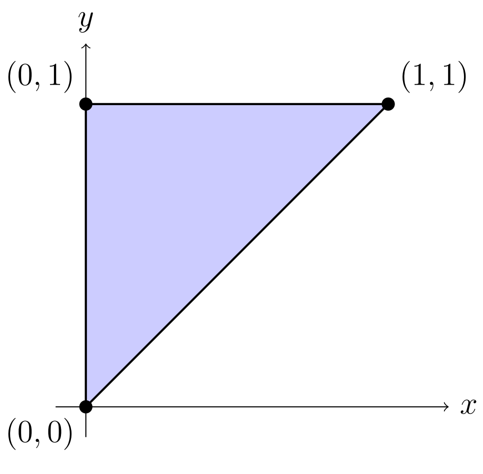
ii. Zeigen Sie, dass in ZF eine eindeutige Menge A existiert, sodass

$$\forall x\Big(x \in A \leftrightarrow \forall n\big(n \in x \to n \in \omega\big)\Big).$$

Hinweis: Wie heisst diese Menge A?

Lösung:

(a) **(zeichnen)**



(b) **(Element, Teilmenge)**

i. $\varnothing \in \varnothing$: falsch. Grund: Die rechte Seite ist die leere Menge und enthält darum kein Element.

ii. $\varnothing \in \{\varnothing\}$: wahr. Grund: Die Menge $\{\varnothing\}$ enthält das Element $\varnothing$ gemäss der Definition von $\{x\} := \{x, x\}$. (Siehe die Vorlesung.)

iii. $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$: wahr. Grund: Jedes Element x von $\varnothing$ ist ein Element der rechten Seite, da es kein solches x gibt.

iv. $\{1\} \in 3$: falsch. Grund: Die Menge 3 besteht aus den Elementen $0, 1, 2$, die sich alle von $\{1\}$ unterscheiden. (Überprüfen Sie das!)

v. $\{1\} \subseteq 3$: wahr. Grund: Das einzige Element von $\{1\}$ ist 1. Dieses Element ist in $3 = \{0, 1, 2\}$ enthalten.

vi. $2 \subseteq \{1, 2\}$: falsch. Grund: Das Element 0 von $2 = \{0, 1\}$ ist nicht in $\{1, 2\}$ enthalten.

(c) **(Anzahl Elemente)**

i. $|\varnothing| = 0$

ii. $|\{\varnothing\}| = 1$

iii. $|\{0, 1, 0\}| = 2$

iv. $\left|\left\{(-1)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} := \{-1, 1\}\right| = 2$

(d) **(Lösungsmenge)**

$$\text{Lösungsmenge von } x - 1 = 0 \text{ über } \omega \quad = \quad \left\{x \in \omega \,\middle|\, x - 1 = 0\right\} = \{1\}$$

Bemerkung: Das ist nicht diesselbe Menge wie $1 = \{0\}$.

(e)

$$\begin{aligned}
X \cup Y &= \{0, 1, 2\} \\
X \cap Y &= \{1\} \\
X \backslash Y &= \{0\} \\
X \triangle Y &= (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X) = \{0, 2\} \\
\bigcup 2 &= \bigcup \{0, 1\} = 0 \cup 1 = 1 = \{0\}
\end{aligned}$$

(f) **(kartesisches Produkt)**

i. $\{0, 1\} \times \{2, 3\} = \Big\{\langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\Big\}$

ii. $\{2, 3\}^2 = \Big\{\big\{\langle 0, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\big\}, \big\{\langle 0, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\big\}, \big\{\langle 0, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle\big\}, \big\{\langle 0, 3\rangle, \langle 1, 3\rangle\big\}\Big\}$

Bemerkung: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und Mengen $a_0, \ldots, a_{n-1}$ definieren wir *das aus $a_0, \ldots, a_{n-1}$ bestehende n-Tupel als*

$$\big(a_0, \ldots, a_{n-1}\big) := \big\{\langle 0, a_0\rangle, \ldots, \langle n - 1, a_{n-1}\rangle\big\}.$$

Das ist die eindeutige Funktion a mit Definitionsbereich $n = \big\{0, \ldots, n - 1\big\}$, die für jedes $i \in n$ die Bedingung $a(i) = a_i$ erfüllt. Im Fall $n = 2$ können wir das 2-Tupel (a_0, a_1) kanonisch mit dem geordneten Paar $\langle a_0, a_1\rangle$ identifizieren.
Mittels dieser Notation können wir die Menge $\{2, 3\}^2$ wie folgt einfacher darstellen:

$$\{2, 3\}^2 = \big\{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\big\}$$

(g) **(Potenzmenge)**

i.

$$\mathcal{P}\big(2 = \{0, 1\}\big) := \big\{\varnothing, \{1\}, \{0\}, \{0, 1\} = 2\big\}.$$

ii. Erinnerung: Das Potenzmengenaxiom besagt:

$$\mathsf{ZF}_6 :\equiv \forall x \exists z \forall y \big(y \in z \leftrightarrow y \subseteq x\big)$$

Mit $z := \omega$ folgt daraus, dass es eine Menge $A = z$ gibt, sodass

$$\forall y\big(y \in A \leftrightarrow y \subseteq \omega\big).$$

Die Bedingung $y \subseteq \omega$ bedeutet, dass $\forall n\big(n \in y \to n \in \omega\big)$. Die Menge A hat daher die gewünschte Eigenschaft.
Bemerkung: Aus dem Extensionalitätsaxiom ZF_1 folgt, dass A eindeutig ist. A heisst die *Potenzmenge* von ω. Wir schreiben dafür $\mathcal{P}(\omega)$.

1. **(Satz von Cantor)** Sei A eine Menge. Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung $g : A \to {}^{A}2$ gibt.

Bemerkung: Das ist eine Variante des Satzes von Cantor, den wir in der Vorlesung behandelt haben.

Hinweis: zweites Cantorsches Diagonalverfahren. Wir haben eine Variante dieses Verfahrens im Beweis des Satzes von Cantor verwendet.

Lösung: Sei $g : A \to {}^{A}2$ eine Funktion.

Behauptung: g ist nicht surjektiv.

Beweis: Wir definieren

$$f : A \to 2 = \{0, 1\}, \qquad f(a) := \begin{cases} 1, & \text{falls } g(a)(a) = 0, \\ 0, & \text{falls } g(a)(a) = 1. \end{cases}$$

Sei $a \in A$. Gemäss Definition von f gilt $g(a)(a) \neq f(a)$. Daher gilt $g(a) \neq f$. Da a beliebig ist, folgt daraus, dass f nicht im Bild von g liegt. Daher ist g nicht surjektiv. Das beweist die Behauptung und damit die Variante des Satzes von Cantor.

Bemerkung: In diesem Beweis haben wir das zweite Cantorsche Diagonalverfahren angewendet. Im Fall $A = \omega$ können wir dieses wie folgt visualisieren. Sei $g : \omega \to {}^{\omega}2$ eine Funktion und $n \in \omega$. Wir fassen die Funktion $g_n := g(n) : \omega \to 2 = \{0, 1\}$ als eine Folge auf und schreiben sie als eine unendliche Liste, also $g_n = g_n^0 g_n^1 \dots$. (Wir lassen hier Hilfszeichen wie Klammern und Kommas weg.) Die Funktion g entspricht der folgenden Tabelle:

n	g_n		
0	g_0^0	g_0^1	$\dots$
1	g_1^0	g_1^1	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Beispiel:

n	g_n			
0	0	0	0	$\dots$
1	0	1	0	$\dots$
2	1	0	1	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		

Wir ersetzen in dieser Tabelle den diagonalen Eintrag g_n^n durch die jeweils andere Zahl in $\{0, 1\}$. Im Beispiel erhalten wir also:

n	g_n			
0	1	0	0	$\dots$
1	0	0	0	$\dots$
2	1	0	0	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		

Wir definieren $f \in {}^{\omega}2$ als die Funktion, die der roten Diagonale in dieser Tabelle entspricht. Diese Funktion ist nicht gleich $g(n) = g_n$ für irgendein $n \in \omega$, da sich f von g_n an der n-ten

Stelle unterscheidet. Daher liegt f nicht im Bild von g. Das erklärt den Beweis der Variante des Satzes von Cantor anschaulich. Es erklärt auch den Namen *Cantorsches Diagonalverfahren*.

2. **(Menge ω der natürlichen Zahlen: Wohldefiniertheit, kleinste induktive Menge; Induktionsprinzip in ZF)** Erinnerung: Wir definieren das *Nachfolgersymbol* als das einstellige Funktionssymbol s durch den Satz

$$\forall x\big(\mathrm{s}\,x = x \cup \{x\}\big).$$

Wir definieren das unäre Relationssymbol ind durch den Satz

$$\forall x\big(\mathrm{ind}\,x \leftrightarrow \forall y \in x(\mathrm{s}\,y \in x)\big).$$

Wir nennen eine Menge x *induktiv*, falls $\mathrm{ind}\,x$ gilt.

(a) **($*$) (ω ist wohldefiniert)** Seien I und I' induktive Mengen, die $\varnothing$ enthalten. Wir definieren

$$S_I := \big\{X \in \mathcal{P}(I) \,\big|\, \varnothing \in X \wedge \mathrm{ind}\,X\big\}.$$

Zeigen Sie, dass in ZF gilt:

$$\bigcap S_I = \bigcap S_{I'} \tag{1}$$

Relevanz: Wir definieren die Menge der natürlichen Zahlen als

$$\omega := \bigcap S_I, \tag{2}$$

wobei I eine beliebige induktive Menge ist, die $\varnothing$ enthält. Wegen (1) hängt die rechte Seite von (2) nicht von der Wahl von I ab. Gemäss dem Unendlichkeitsaxiom gibt es ein I wie oben. Daher ist die Menge ω wohldefiniert. (In der Vorlesung haben wir mittels des Potenzmengen-, Aussonderungs-, Vereinigungs- und Extensionalitätsaxiom gezeigt, dass die rechte Seite von (2) überhaupt sinnvoll ist.)

Lösung: Wir brauchen Folgendes:

Bemerkung: Seien S, S' Mengen, sodass S nichtleer ist und für jedes $X \in S$ ein $X' \in S'$ existiert, sodass $X \supseteq X'$. Dann gilt

$$\bigcap S \supseteq \bigcap S'.$$

(Überlegen Sie sich das!)
Sei jetzt $X \in S_I$. Wir definieren

$$X' := X \cap I'. \tag{3}$$

Es gilt $X' \in \mathcal{P}(I')$. Da $\varnothing \in X$ und $\varnothing \in I'$, gilt $\varnothing \in X'$. Da X und I' induktiv sind, ist X' induktiv. Es folgt, dass $X' \in S_{I'}$. Gemäss (3) gilt $X \supseteq X'$.
Es gibt also für jedes $X \in S_I$ ein $X' \in S_{I'}$, sodass $X \supseteq X'$. Die Menge S_I ist nicht leer, da sie I enthält. Mittels der Bemerkung folgt, dass

$$\bigcap S_I \supseteq \bigcap S_{I'}.$$

Indem wir die Rollen von I und I' vertauschen, erhalten wir auch die umgekehrte Inklusion "$\subseteq$". Mittels des Extensionalitätsaxioms ZF_1 folgt daraus die Gleichheit (1).

(b) **(kleinste induktive Menge, die $\varnothing$ enthält)**

i. Zeigen Sie, dass ω die leere Menge enthält und induktiv ist.

ii. Zeigen Sie, dass ω die kleinste solche Menge ist. Das heisst, dass ω eine Teilmenge jeder induktiven Menge ist, welche die leere Menge enthält.

Lösung: Wir wählen eine induktive Menge I, die $\varnothing$ enthält.

i. Für jedes $X \in S_I$ gilt $\varnothing \in X$. Da $S_I \neq \varnothing$, folgt daraus, dass $\varnothing \in \bigcap S_I = \omega$. Ein analoges Argument zeigt, dass ω induktiv ist. (Überprüfen Sie das!)

ii. Sei A eine induktive Menge, die $\varnothing$ enthält. Dann gilt $X := A \cap I \in S_I$ und daher $\omega = \bigcap S_I \subseteq A$.

(c) **($*$) (Induktionsprinzip von ZF)** Das Induktionsprinzip der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre besagt:

$$\forall X \big(X \subseteq \omega \wedge \varnothing \in X \wedge \operatorname{ind} X \rightarrow X = \omega \big) \tag{4}$$

In Worten: Jede nichtleere induktive Teilmenge der natürlichen Zahlen ist gleich der Menge der natürlichen Zahlen.

Zeigen Sie, dass dieses Induktionsprinzip gilt.

Bemerkung: Das entspricht dem gewöhnlichen Induktionsprinzip, das Sie aus der Schule kennen. Um das einzusehen, sei $n \in \omega$. Wir schreiben $n + 1 := \mathrm{s}\, n$. Sei $P(n)$ eine von $n \in \omega$ abhängige Aussage, sodass $P(0)$ gilt und für jedes $n \in \omega$ aus $P(n)$ die Aussage $P(n+1)$ folgt. Dann gilt für jedes $n \in \omega$ die Aussage $P(n)$. Das folgt aus (4), indem wir die folgende Menge betrachten:

$$X := \big\{ n \in \omega \,\big|\, P(n) \big\}$$

Lösung: Wir wählen eine induktive Menge I, die $\varnothing$ enthält. Sei $X \subseteq \omega$ eine induktive Menge, die $\varnothing$ enthält. Es gilt:

$$X \subseteq \omega = \bigcap S_I \subseteq I \qquad (\text{da } I \in S_I).$$

Daraus folgt, dass $X \in \mathcal{P}(I)$ und daher $X \in S_I$. Es folgt, dass $\omega = \bigcap S_I \subseteq X$. Wegen $X \subseteq \omega$ und des Extensionalitätsaxioms ZF_1 folgt daraus, dass $X = \omega$. Das beweist (4).

3. **(natürliche Zahlen und ω sind Ordinalzahlen)** Wir definieren den Begriff einer Ordinalzahl wie folgt. Sei A eine Menge und R eine binäre Relation auf A.

Definition 1 (lineare Ordnung, Wohlordnung, Ordinalzahl)

- *(Trichotomie) Wir sagen, dass R* Trichotomie *erfüllt g. d. w. für alle $x, y \in A$ gilt:*

$$\textit{entweder } xRy \textit{ oder } x = y \textit{ oder } yRx \tag{5}$$

(ausschliessendes Oder)

- *(lineare Ordnung) R heisst (*strikte*)* lineare Ordnung *(auf A) g. d. w. R transitiv ist und Trichotomie erfüllt.*
- *(minimales Element) Sei R eine lineare Ordnung auf A und $S \subseteq A$. Ein Element $x \in S$ heisst (R-)*minimal *g. d. w. für jedes $y \in S \setminus \{x\}$ gilt xRy.*

- *(Wohlordnung) R heisst* Wohlordnung *(*auf *A) g. d. w. R eine lineare Ordnung ist und jede nichtleere Teilmenge $S \subseteq A$ ein R-minimales Element besitzt. In diesem Fall nennen wir A R-*wohlgeordnet.
- *(Ordinalzahl) Wir schreiben*

$$\in_A := \{\langle x, y\rangle \in A \times A \,|\, x \in y\},$$

Die Menge A heisst Ordinalzahl *g. d. w. sie $\in_A$-wohlgeordnet ist.*

Motivation: Der Begriff einer Ordinalzahl präzisiert und verallgemeinert die intuitive Idee der Position in einer Liste. Ein zentraler Aspekt ist hierbei, dass wir je zwei Positionen miteinander vergleichen können. Die Positionen sind also linear geordnet.

Jede natürliche Zahl n ist eine Ordinalzahl. (Siehe **3**.b.) Sie entspricht der intuitiven Idee der n-ten Position. Wir identifizieren also $n = 0, 1, 2, \ldots$ mit den Wörtern "nullter, erster, zweiter, ...".[3] Die Menge ω der natürlichen Zahlen ist ebenfalls eine Ordinalzahl. (Siehe **3**.a.) Sie ist grösser (bezüglich der linearen Ordnung $\in$) als jede natürliche Zahl. Es gibt viele noch grössere Ordinalzahlen, zum Beispiel

$$\omega + 1 := \mathrm{s}(\omega) = \omega \cup \{\omega\}, \quad \omega + 2 := \mathrm{s}(\mathrm{s}(\omega)), \quad \ldots, \quad \omega + \omega = \omega \cdot 2, \quad \ldots, \quad \omega \cdot 3,$$
$$\ldots, \quad \omega \cdot \omega = \omega^2, \quad \ldots, \quad \omega^3, \quad \ldots, \quad \omega^\omega, \quad \ldots, \quad \omega^{\omega^\omega} = \omega^{(\omega^\omega)}, \quad \ldots$$

Für die Definition dieser Ordinalzahlen siehe S. 166 in:

L. Halbeisen und R. Krapf, *Gödel's theorems and Zermelo's axioms—a firm foundation of mathematics*, Birkhäuser/Springer, Cham, 2020.

Für $\omega + \omega$ siehe auch **6**. Zur Illustration siehe Abbildung 1.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge ω der natürlichen Zahlen eine Ordinalzahl ist.

Hinweise:

i. Transitivität von $\in_\omega$: Verwenden Sie Induktion, d. h. **2**.c.

ii. Trichotomie für $\in_\omega$: Wir schreiben

$$\varphi :\equiv m \in n \vee m = n \vee n \in m.$$

Beweis von $\forall m, n \in \omega\, \varphi$: Wir definieren:

$$S_n := \{m \in \omega \,|\, \varphi\} \qquad \text{(für } n \in \omega) \tag{6}$$

Zeigen Sie wie folgt mittels Induktion, dass für jedes $n \in \omega$ gilt $S_n = \omega$:

- Zeigen Sie mittels Induktion, dass $S_0 = \omega$.
- **Hilfssatz 2** *Für alle $n \in \omega$ und $m \in n$ gilt $n \notin m$.*
  Beweis des Hilfssatzes: Wir betrachten die Menge

$$A := \{n \in \omega \,|\, \forall m \in n (n \notin m)\}.$$

Zeigen Sie mittels Induktion, dass $A = \omega$.

[3] Wir fangen hier bei 0 mit Zählen an.

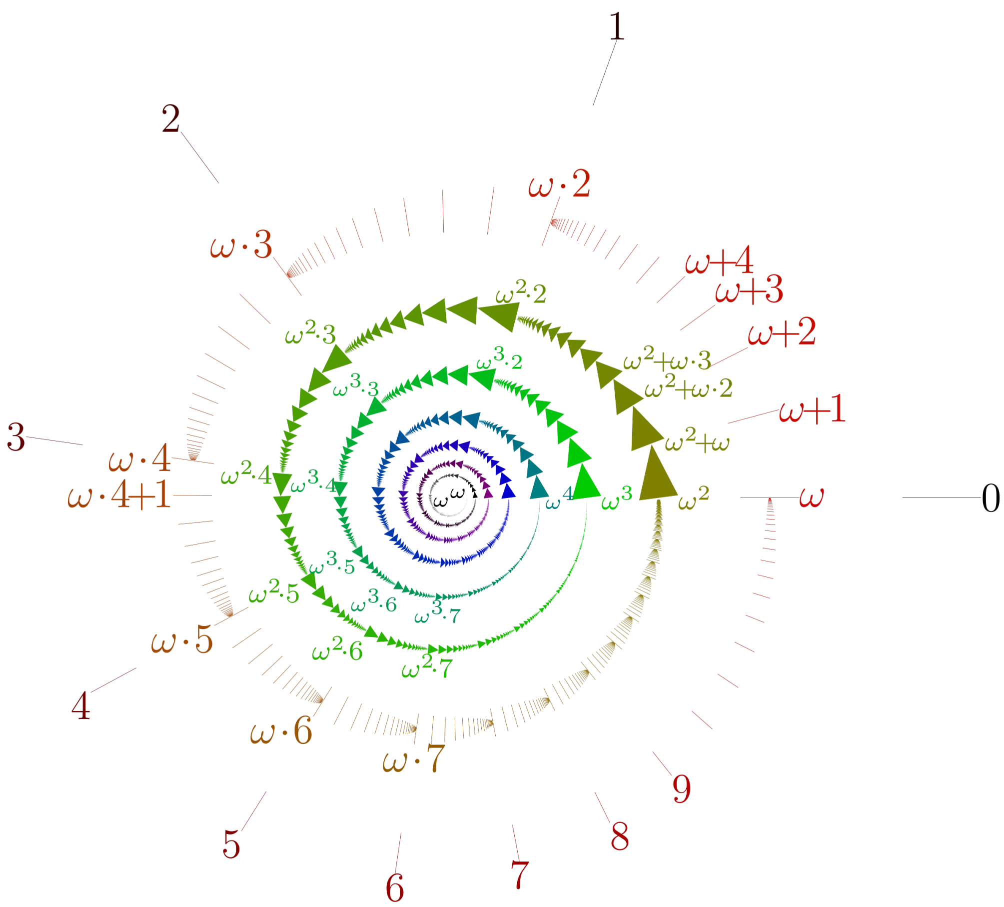


Abbildung 1: Die Ordinalzahlen $0,\ 1,\ \ldots,\ \omega,\ \omega+1,\ \ldots,\ \omega\cdot 2,\ \ldots,\ \omega^2,\ \ldots,\ \omega^\omega$.

Wir nehmen an, dass $S_n = \omega$. Zeigen Sie mittels Induktion, dass $S_{\mathrm{s}\,n} = \omega$. Induktionsschritt: Sei $m \in S_{\mathrm{s}\,n}$. Wir zeigen, dass

$$\mathrm{s}\,m \in S_{\mathrm{s}\,n}.$$

Fall $m \in \mathrm{s}\,n = n \cup \{n\}$**:**

Unterfall: $m \in n$**:** Dann gilt

$$n \notin \mathrm{s}\,m.$$

Das folgt aus Transitivität von $\in_\omega$ (siehe **3**.a) und Hilfssatz 2. Wegen unserer Annahme $S_n = \omega$ gilt $\mathrm{s}\,m \in S_n$. Mittels (6) folgt, dass $n = \mathrm{s}\,m$ oder $\mathrm{s}\,m \in n$.

iii. Trichotomie für $\in_\omega$: Beweis, dass für alle $m, n \in \omega$ höchstens eine der Aussagen $m \in n$, $m = n$, $n \in m$ gilt: Verwenden Sie **3**.(a)i und Hilfssatz 2.

iv. $\in_\omega$ ist Wohlordnung: Zeigen Sie mittels Induktion, dass jede nichtleere Teilmenge einer natürlichen Zahl ein $\in$-kleinstes Element besizt.
Sei jetzt $S \subseteq \omega$ nichtleer. Wir wählen ein $n \in S$. Betrachten Sie $S \cap \mathrm{s}\,n$.

Lösung:

i. **Transitivität von** $\in_\omega$: Wir betrachten die Formel

$$\varphi :\equiv \forall m \in n (m \subseteq n)$$

Hilfssatz 3 *Es gilt:*

$$\forall n \in \omega\, \varphi$$

Aus diesem Hilfssatz folgt, dass $\in_\omega$ transitiv ist. (Überprüfen Sie das!)

Beweis des Hilfssatzes 3: Wir zeigen das mit Induktion.

Induktionsverankerung: $\varphi(n = 0 = \emptyset)$ gilt.

Induktionsschritt: Sei $n \in \omega$ so, dass $\varphi(n)$ gilt. Sei $m \in \mathrm{s}\,n$.

Fall $m \in n$**:** Wegen $\varphi(n)$ gilt dann $m \subseteq n \subseteq n \cup \{n\} = \mathrm{s}\,n$.

Fall $m = n$**:** Dann gilt $m = n \subseteq \mathrm{s}\,n$.

Die die beiden Fälle alle Möglichkeiten abdecken, gilt immer $m \subseteq \mathrm{s}\,n$. Daher gilt $\varphi(\mathrm{s}\,n)$. Das zeigt den Induktionsschritt.

Mittels Induktion folgt, dass für jedes $n \in \omega$ $\varphi(n)$ gilt. Das beweist Hilfssatz 3. □

ii. **Trichotomie für** $\in_\omega$**:** Wir schreiben

$$\varphi :\equiv m \in n \vee m = n \vee n \in m.$$

Behauptung:

$$\forall m, n \in \omega\, \varphi \tag{7}$$

Beweis der Behauptung: Wir definieren:

$$S_n := \{m \in \omega \mid \varphi\} \qquad \text{(für } n \in \omega) \tag{8}$$

Wir zeigen mittels Induktion, dass

$$\forall n \in \omega(S_n = \omega) \tag{9}$$

- **Induktionsverankerung** $n = 0$**:** Wir zeigen mittels Induktion, dass $S_0 = \omega$, d. h.
$$\forall m \in \omega(m \in S_0). \tag{10}$$
Induktionsverankerung: Es gilt $\varphi(m = 0, n = 0)$ und darum $m = 0 \in S_0$.

  Induktionsschritt: Sei $m \in S_0$. Es gilt $m \notin \varnothing = 0$. Da $m \in S_0$, gilt $\varphi(m, 0)$ und daher $m = 0$ oder $0 \in m$. In beiden Fällen gilt $0 \in \mathrm{s}\, m$ und daher $\varphi(\mathrm{s}\, m, 0)$, also $\mathrm{s}\, m \in S_0$. Das beweist den Induktionsschritt.

  Mittels **2**.c (Induktion) folgt (10), d. h.
$$S_0 = \omega.$$
Das zeigt die Induktionsverankerung $n = 0$ im Beweis von (9).
- **Induktionsschritt** $n \to \mathrm{s}\, n$ **im Beweis von** (9)**:** Wir benötigen das Folgende.
Hilfssatz 4 *Für alle $n \in \omega$ und $m \in n$ gilt $n \nsubseteq m$.*

  Beweis des Hilfssatzes 4: Wir betrachten die Menge
$$A := \big\{n \in \omega \,\big|\, \forall m \in n(n \nsubseteq m)\big\}.$$
Wir zeigen mittels Induktion, dass $A = \omega$.

  Induktionsverankerung: Es gilt $0 = \varnothing \in A$. (Warum?)

  Induktionsschritt: Sei $n \in A$. Sei
$$m \in \mathrm{s}\, n.$$
Fall $m \in n$: Dann gilt gemäss Induktionsannahme $n \in A$, dass $n \nsubseteq m$ und daher
$$\mathrm{s}\, n = n \cup \{n\} \nsubseteq m.$$
Fall $m = n$: Da $n \in A$, gilt dann, dass $m \notin n$, also $\{n = m\} \nsubseteq n = m$. Daraus folgt, dass
$$\mathrm{s}\, n = n \cup \{n\} \nsubseteq m.$$
Da die beiden Fälle alle Möglichkeiten abdecken, gilt also immer $\mathrm{s}\, n \nsubseteq m$. Daraus folgt, dass $\mathrm{s}\, n \in A$. Das beweist den Induktionsschritt.

  Mittels Induktion folgt, dass $A = \omega$. Die Aussage des Hilfssatzes 4 folgt. □

  Korollar 5 *Für alle $m, n \in \omega$ gilt*
$$m \in n \to n \notin m, \tag{11}$$
$$m \notin m \tag{12}$$

Beweis des Korollars 5: (11): Wir nehmen an, dass $m \in n$. Aus **3**.(a)i (Transitivität von $\in_\omega$) folgt, dass $m \subseteq n$. Mittels Hilfssatz 4 folgt daraus, dass $n \notin m$. Das beweist (11).
(12) folgt aus $m \subseteq m$ und Hilfssatz 4. Das beweist Korollar 5. □

Induktionsschritt $n \to \mathrm{s}\, n$ **im Beweis von** (9)**:** Sei $n \in \omega$ so, dass

$$S_n = \omega.$$

Wir zeigen mittels Induktion, dass $S_{\mathrm{s}\, n} = \omega$, d. h.

$$\forall m \in \omega\, \varphi(m, \mathrm{s}\, n). \tag{13}$$

Induktionsverankerung $m = 0$**:** Gemäss unserer Induktionsannahme $S_n = \omega$ gilt $m = 0 \in S_n$, also $\varphi(0, n)$.

Fall $n = 0$: Dann gilt $0 \in \mathrm{s}\, n$, also $\varphi(0, \mathrm{s}\, n)$ und daher $0 \in S_{\mathrm{s}\, n}$.

Fall $n \neq 0$: Dann gilt $n \notin 0$. Wegen $\varphi(0, n)$ gilt daher $0 \in n \subseteq \mathrm{s}\, n$, also $\varphi(0, \mathrm{s}\, n)$ und daher $0 \in S_{\mathrm{s}\, n}$.

In jedem Fall gilt also $0 \in S_{\mathrm{s}\, n}$. Das zeigt die Induktionsverankerung $m = 0$.

Induktionsschritt: Sei

$$m \in S_{\mathrm{s}\, n}.$$

Wir zeigen, dass

$$\mathrm{s}\, m \in S_{\mathrm{s}\, n}. \tag{14}$$

Fall $m \in \mathrm{s}\, n = n \cup \{n\}$**:**

Unterfall $m \in n$**:** Aus Korollar 5 folgt dann, dass

$$n \notin \mathrm{s}\, m. \tag{15}$$

Da $S_n = \omega$, gilt $\mathrm{s}\, m \in S_n$, d. h. $\varphi(\mathrm{s}\, m, n)$. Wegen (15) folgt daraus, dass $\mathrm{s}\, m \in n$ oder $\mathrm{s}\, m = n$, also $\mathrm{s}\, m \in \mathrm{s}\, n$. Daher gilt $\varphi(\mathrm{s}\, m, \mathrm{s}\, n)$ und daher (14).

Unterfall: $m = n$**:** Dann gilt $\mathrm{s}\, m = \mathrm{s}\, n$, daher $\varphi(\mathrm{s}\, m, \mathrm{s}\, n)$ und darum (14).

Da die beiden Unterfälle alle Möglichkeiten abdecken, gilt also im Fall $m \in \mathrm{s}\, n$ immer (14).

Fall $m = \mathrm{s}\, n$**:** Dann gilt $\mathrm{s}\, n \in m \cup \{m\} = \mathrm{s}\, m$, daher $\varphi(\mathrm{s}\, m, \mathrm{s}\, n)$ und darum (14).

Fall $\mathrm{s}\, n \in m$**:** Dann gilt $\mathrm{s}\, n \in \mathrm{s}\, m$, daher $\varphi(\mathrm{s}\, m, \mathrm{s}\, n)$ und darum (14).

Wegen unserer Induktionsannahme $m \in S_{\mathrm{s}\, n}$ decken die drei obigen Fälle alle Möglichkeiten ab. Bedingung (14) gilt also immer. Das zeigt den Induktionsschritt.

Mittels Induktion folgt (13). Das beweist den Induktionsschritt $n \to n+1$ im Beweis von (9). Mittels Induktion folgt, dass (9), d. h. (7).

iii. **Trichotomie für $\in_\omega$:** Aus Korollar 5 folgt, dass für alle $m, n \in \omega$ höchstens eine der Aussagen $m \in n$, $m = n$, $n \in m$ gilt.

iv. **$\in_\omega$ ist Wohlordnung:** Wir betrachten die Formel

$$\varphi(n) :\equiv \forall A\Big(A \subseteq n \wedge A \neq \varnothing \to \exists m \in A \forall \ell \in A \backslash \{m\}(m \in \ell)\Big).$$

Lemma 6 *Es gilt*

$$\forall n\, \varphi(n).$$

Beweis des Lemmas 6: Induktionsverankerung: Für $n = 0$ ist für jedes A die Bedingung $A \subseteq n \wedge A \neq \varnothing$ nicht erfüllt. Daher gilt $\varphi(n = 0)$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \omega$ so, dass $\varphi(n)$ gilt. Sei $A' \subseteq \mathrm{s}\, n$ eine nichtleere Teilmenge. Wir definieren

$$A := A' \cap n.$$

Fall: $A \neq \varnothing$: Gemäss Induktionsannahme $\varphi(n)$ gibt es dann ein $m \in A$, sodass $\forall \ell \in A \backslash \{m\}(m \in \ell)$. Es gilt

$$\forall \ell \in A' \backslash \{m\}(m \in \ell). \tag{16}$$

(Überprüfen Sie das!)

Fall: $A = \varnothing$: Da $A = A' \cap n$ und $A' \subseteq \mathrm{s}\, n = n \cup \{n\}$ nicht leer ist, gilt dann $m := n \in A'$. Da $A = \varnothing$, gilt $A' \backslash \{m\} = \varnothing$. Die Bedingung (16) ist daher erfüllt.

Da die beiden Fälle alle Möglichkeiten abdecken, gilt (16) also immer. Also ist $\varphi(\mathrm{s}\, n)$ erfüllt. Das zeigt den Induktionsschritt.

Mittels Induktion folgt, dass $\forall n \in \omega\, \varphi(n)$ gilt. Das beweist Lemma 6. □

Sei jetzt $S \subseteq \omega$ nichtleer. Wir wählen ein $n \in S$. Gemäss Lemma 6 besitzt $A := S \cap \mathrm{s}\, n$ ein $\in$-kleinstes Element m. Sei $\ell \in S \backslash \{m\}$.

Fall $\ell \in \mathrm{s}\, n$: Dann gilt $\ell \in A$ und daher $m \in \ell$.

Fall $\mathrm{s}\, n = \ell$: Dann gilt $m \in A \subseteq \mathrm{s}\, n = \ell$, also $m \in \ell$.

Fall $\mathrm{s}\, n \in \ell$: Wegen $m \in \mathrm{s}\, n$ und Transitivität (**3**.(a)i) gilt dann $m \in \ell$.

Wegen (7) (Trichotomie) decken die drei Fälle alle Möglichkeiten ab. Daher gilt immer $m \in \ell$. Die Menge S besitzt daher ein $\in_S$-kleinstes Element. Die Relation $\in_\omega$ ist daher eine Wohlordnung. Die Menge ω ist daher eine Ordinalzahl.

(b) **(natürliche Zahl ist Ordinalzahl)** Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl eine Ordinalzahl ist.

Hinweis: Verwenden Sie **3**.a.

Lösung:

- **Transitivität:** Wir benötigen den folgenden Hilfssatz.

  Hilfssatz 7 *Es gilt:*
  $$\forall n \in \omega (n \subseteq \omega)$$

  Beweis des Hilfssatzes 7: Wir definieren
  $$X := \{n \in \omega \,|\, n \subseteq \omega\}.$$
  Wir zeigen mittels Induktion, dass
  $$X = \omega.$$
  Es gilt
  $$X \subseteq \omega, \qquad \varnothing \in X. \tag{17}$$
  Behauptung: X ist induktiv.

  Beweis der Behauptung: Sei $n \in X$. Gemäss Definition von X gilt dann $n \subseteq \omega$ und $n \in \omega$, also $\mathrm{s}\, n = n \cup \{n\} \subseteq \omega$ und darum $\mathrm{s}\, n \in X$. Daher ist X induktiv. Das beweist die Behauptung.

  Aus (17) und der Behauptung folgt mittels **2**.c (Induktion), dass $X = \omega$. Die Aussage des Hilfssatzes 7 folgt. □

  Sei $n \in \omega$. Seien $x, y, z \in n$, sodass $x \in y$ und $y \in z$. Aus Hilfssatz 7 folgt, dass $x, y, z \in \omega$. Gemäss **3**.a ist $\in_\omega$ transitiv. Es folgt, dass $x \in z$. Daher ist $\in_n$ transitiv.
- **Trichotomie:** Sei $n \in \omega$. Seien $\ell, m \in n$. Aus Hilfssatz 7 folgt, dass $\ell, m \in \omega$. Gemäss **3**.a ist ω eine Ordinalzahl. Daher erfüllt es Trichotomie. Es folgt, dass das Tripel $(R, x, y) :\equiv (\in, \ell, m)$ die Bedingung (5) erfüllt. Da ℓ, m beliebig sind, folgt daraus, dass n Trichotomie erfüllt.
- **Wohlordnung:** Diese Bedingung ist gemäss Lemma 6 erfüllt.

Es folgt, dass jede natürliche Zahl eine Ordinalzahl ist.

4. **(Endlichkeit, Abzählbarkeit)** Erinnerung: Wir nennen eine Menge A *abzählbar* g. d. w. es eine injektive Abbildung $f : A \to \omega$ gibt. Zeigen Sie, dass in ZF gilt:

(a) **($*$)** Jede endliche Menge ist abzählbar.

Lösung: Sei A eine endliche Menge. Gemäss Definition gibt es ein $n \in \omega$ und eine Bijektion $\varphi : n \to A$. Gemäss Hilfssatz 7 ist n eine Teilmenge von ω. Wir definieren $\iota : n \to \omega$ als die Inklusionsabbildung und
$$f := \iota \circ \varphi^{-1} : A \to \omega.$$
Diese Abbildung ist injektiv. Es folgt, dass A abzählbar ist.

(b) Eine nichtleere Menge A ist genau dann abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $g : \omega \to A$ gibt.

Hinweis für die Implikation "$\leftarrow$": Sei $g : \omega \to A$ surjektiv. Definieren Sie eine Abbildung $f : A \to \omega$ so, dass für jedes $a \in A$ gilt:

$$f(a) \in g^{-1}(a) = \{n \in \omega \mid g(n) = a\}.$$

Verwenden Sie dazu **3**.a.

Bemerkung: Wir können nicht einfach sagen, dass wir für jedes $a \in A$ ein $n \in g^{-1}(a)$ wählen und $f(a)$ als dieses n definieren. Um das Wort *wählen* hier zu formalisieren, brauchen wir nämlich das Auswahlaxiom. (Dieses wird später in der Vorlesung behandelt.)

Lösung: Implikation "$\rightarrow$": Sei A eine nichtleere abzählbare Menge. Wir wählen eine injektive Abbildung $f : A \to \omega$ und ein Element $a \in A$. Wir definieren die Abbildung

$$g : \omega \to A, \qquad g(n) := \begin{cases} f^{-1}(n), & \text{falls } n \in f[A], \\ a, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist surjektiv. (Warum?) Das zeigt "$\rightarrow$".

"$\leftarrow$": Sei A eine Menge, für welche eine surjektive Abbildung $g : \omega \to A$ existiert. Wir wählen ein solches g. Sei $a \in A$. Da g surjektiv ist, ist das Urbild

$$g^{-1}(a) := \{n \in \omega \mid g(n) = a\}$$

nicht leer. Gemäss **3**.a ist ω wohlgeordnet ist. Daher besitzt $g^{-1}(a)$ ein eindeutiges kleinstes Element. (Warum ist es eindeutig?) Wir definieren

$$f : A \to \omega, \qquad f(a) := n,$$

wobei n das kleinste Element von $g^{-1}(a)$ ist. Diese Abbildung ist injektiv. (Warum?) Es folgt, dass A abzählbar ist. Das zeigt "$\leftarrow$".

5. **(iterativ definierte Menge, Ersetzungsschema)** Seien f ein einstelliges Funktionssymbol und v eine Variable. Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass in ZF die Menge

$$B := \{v, f(v), f(f(v)), \dots\}$$

existiert. Das bedeutet, dass es eine kleinste Menge B gibt, die v enthält und unter f abgeschlossen ist, d. h. für jedes $u \in B$ auch $f(u)$ enthält. Damit meinen wir formal:

$$\forall v \exists B\Big(v \in B \wedge \forall u \in B(fu \in B) \wedge \forall C\big(v \in C \wedge \forall u \in C(fu \in C) \to B \subseteq C\big)\Big) \tag{18}$$

Zeigen Sie diese Aussage.

Hinweise: Wir definieren:

$$\alpha(n, g) :\equiv \exists Y\big(g \subseteq (\mathrm{s}\, n) \times Y\big) \tag{19}$$
$$\beta(n, g) :\equiv \forall m \in n \forall u\big(\langle m, u\rangle \in g \to \langle \mathrm{s}\, m, fu\rangle \in g\big) \tag{20}$$
$$\gamma(g) :\equiv \forall m \forall u \forall w\big(\langle m, u\rangle \in g \wedge \langle m, w\rangle \in g \to u = w\big) \tag{21}$$
$$\delta(n, g) :\equiv \alpha(n, g) \wedge \beta(n, g) \wedge \gamma(g) \wedge \langle 0, v\rangle \in g \tag{22}$$

Seien $n \in \omega$ und g so, dass $\delta(n, g)$ gilt. Sei Y wie in $\alpha(n, g)$.

Bemerkungen 8 g ist eine Funktion von $\mathrm{s}\,n$ nach Y. Begründung:

- (Relation zwischen $\mathrm{s}\,n$ und Y) Wegen $\alpha(n, g)$ ist g eine Relation zwischen den Mengen $\mathrm{s}\,n$ und Y, d. h. eine Teilmenge von $(\mathrm{s}\,n) \times Y$.

  Seien X, Y Mengen und R eine Relation zwischen X und Y.

- (g ist linkstotal) Wir nennen R *linkstotal* g. d. w. es für jedes $x \in X$ (mindestens) ein $y \in Y$ gibt, sodass $\langle x, y\rangle \in R$. Aus $\langle 0, v\rangle \in g$ und $\beta(n, g)$ folgt mittels Induktion, dass g linkstotal ist.
- (g ist rechtseindeutig) Wir nennen R *rechtseindeutig* g. d. w. es für jedes $x \in X$ *höchstens* ein $y \in Y$ gibt, sodass $\langle x, y\rangle \in R$. Wegen $\gamma(g)$ ist g rechtseindeutig.
- (g ist eine Funktion) Eine Funktion von X nach Y ist eine Relation zwischen X und Y, die linkstotal und rechtseindeutig ist. Gemäss den vorherigen Bemerkungen ist g also eine Funktion von $\mathrm{s}\,n$ nach Y. Diese Funktion entspricht der endlichen Folge $v, f(v), f(f(v)), \ldots, f^{\circ n}(v) = f(\cdots f(v)\cdots)$ (n Kopien von f).

Wir definieren $g(n)$ als das eindeutige Element $y \in Y$, sodass $\langle n, y\rangle \in g$. Gemäss den Bemerkungen 8 ist $g(n)$ wohldefiniert, d. h. ein solches y existiert und ist eindeutig. Wir definieren:

$$\psi(n) :\equiv \forall g \forall h\big(\delta(n, g) \wedge \delta(n, h) \to g(n) = h(n)\big) \tag{23}$$

(a) Zeigen Sie, mittels Induktion, dass gilt:

$$\forall n\, \psi(n)$$

Induktionsschritt: Sei $n \in \omega$ so, dass $\psi(n)$ gilt. Seien g', h' so, dass $\delta(\mathrm{s}\,n, g'), \delta(\mathrm{s}\,n, h')$ gelten. Betrachten Sie

$$g := g'|_{\mathrm{s}\,n}, \qquad h := h'|_{\mathrm{s}\,n}$$

(b) Wir definieren

$$\varphi(n, y) :\equiv \exists g\big(\delta(n, g) \wedge \langle n, y\rangle \in g\big).$$

Zeigen Sie mittels Ersetzungsaxiomenschemas, dass es eine Menge B gibt, sodass gilt:

$$\forall y\Big(y \in B \leftrightarrow \exists n\big(n \in \omega \wedge \varphi(n, y)\big)\Big)$$

(c) Überprüfen Sie, dass dieses B die Bedingungen in (18) erfüllt.

- Hinweis für die Bedingung $\forall u \in B(fu \in B)$: Sei $u \in B$. Wir wählen ein $n \in \omega$, sodass $\varphi(n, u)$ gilt. Wir wählen ein g, sodass $\delta(n, g)$ gilt und $\langle n, u\rangle \in g$. Betrachten Sie

$$g' := g \cup \{\langle \mathrm{s}\,n, fu\rangle\}.$$

- Hinweis für die Bedingung $\forall C\big(v \in C \wedge \forall u \in C(fu \in C) \to B \subseteq C\big)$: Sei C so, dass $v \in C$ und $\forall u \in C(fu \in C)$.

  Behauptung: Für alle $n \in \omega$ gilt:

$$\forall g \forall y\big(\beta(n, g) \wedge \gamma(g) \wedge \langle 0, v\rangle \in g \wedge \langle n, y\rangle \in g \to y \in C\big) \tag{24}$$

  Zeigen Sie das mittels Induktion.

Induktionsschritt: Sei $n \in \omega$ so, dass (24) gilt. Seien g', y so, dass

$$\beta(\mathrm{s}\,n, g') \wedge \gamma(g') \wedge \langle 0, v\rangle \in g' \wedge \langle \mathrm{s}\,n, y\rangle \in g'.$$

Betrachten Sie

$$g := g' \backslash \{\langle \mathrm{s}\,n, y\rangle\}.$$

Lösung: Wir definieren $\alpha, \ldots, \delta$ wie in (19,...,22).

(a) Wir definieren $\psi(n)$ wie in (23).

Behauptung 1 *Es gilt:*

$$\forall n\, \psi(n) \tag{25}$$

Beweis der Behauptung 1: Wir verwenden Induktion.

Induktionsverankerung: Seien g, h so, dass $\delta(n, g)$, $\delta(n, h)$ gelten. Gemäss (22) gilt $\langle 0, v\rangle \in g$, $\langle 0, v\rangle \in h$ und daher $g(0) = v = h(0)$. Daher gilt $\psi(0)$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \omega$ so, dass $\psi(n)$ gilt. Seien g', h' so, dass $\delta(\mathrm{s}\,n, g')$, $\delta(\mathrm{s}\,n, h')$ gelten. Wir definieren

$$g := g'|_{\mathrm{s}\,n}, \qquad h := h'|_{\mathrm{s}\,n}$$

(Einschränkungen). Es gilt $\delta(n, g)$, $\delta(n, h)$. Aus unserer Induktionsannahme $\psi(n)$ folgt daher, dass

$$g(n) = h(n). \tag{26}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
g'(\mathrm{s}\,n) &= f(g'(n)) && \text{(wegen } \beta(\mathrm{s}\,n, g')\text{)}\\
&= f(g(n)) && \text{(da } g = g'|_{\mathrm{s}\,n}\text{)}\\
&= f(h(n)) && \text{(wegen (26))}\\
&= f(h'(n)) && \text{(da } h = h'|_{\mathrm{s}\,n}\text{)}\\
&= h'(\mathrm{s}\,n) && \text{(wegen } \beta(\mathrm{s}\,n, h')\text{).}
\end{aligned}$$

Also gilt $\psi(\mathrm{s}\,n)$. Das zeigt den Induktionsschritt.

Mittels Induktion folgt (25). Das beweist Behauptung 1. $\square$

(b) Erinnerung: Ersetzungs(axiomen)schema:

$$\mathsf{ZF}_7 : \forall x \forall y \forall z\big(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, y/z) \to y = z\big) \to \forall A \exists B \forall y\Big(y \in B \leftrightarrow \exists x\big(x \in A \wedge \varphi(x, y)\big)\Big),$$

wobei φ eine Formel ist mit $x, y \in \mathrm{frei}\,\varphi$ und $B \notin \mathrm{frei}\,\varphi$. Wir definieren

$$\varphi(n, y) :\equiv \exists g\big(\delta(n, g) \wedge \langle n, y\rangle \in g\big). \tag{27}$$

Aus der Behauptung 1 folgt:

$$\forall n \forall y \forall z\big(\varphi(n, y) \wedge \varphi(n, z) \to y = z\big).$$

Gemäss dem Ersetzungsschema mit $A := \omega$ gibt es daher eine Menge B, sodass gilt:

$$\forall y\Big(y \in B \leftrightarrow \exists n\big(n \in \omega \wedge \varphi(n, y)\big)\Big) \tag{28}$$

Wir wählen ein solches B.

(c) Wir überprüfen die Bedingungen in (18).

Bedingung $v \in B$: Gemäss der Definition (22) erfüllt $g := \{\langle 0, v\rangle\}$ die Bedingung $\delta(0, g)$. Gemäss (27) ist daher $\varphi(0, y := v)$ erfüllt. Gemäss (28) folgt daraus, dass

$$v \in B.$$

Bedingung $\forall u \in B(fu \in B)$: Sei $u \in B$. Gemäss (28) gibt es ein $n \in \omega$, sodass $\varphi(n, u)$ gilt. Wir wählen ein solches n. Gemäss (27) gibt es ein g, sodass $\delta(n, g)$ gilt und $\langle n, u\rangle \in g$. Wir definieren

$$g' := g \cup \{\langle \mathrm{s}\, n, fu\rangle\}.$$

Aus (22) folgt, dass $\delta(\mathrm{s}\, n, g')$ gilt. (Überprüfen Sie das!) Da auch $\langle \mathrm{s}\, n, f(u)\rangle \in g'$, folgt gemäss (27), dass $\varphi(\mathrm{s}\, n, fu)$ gilt. Gemäss (28) gilt daher

$$fu \in B.$$

Bedingung

$$\forall C\big(v \in C \wedge \forall u \in C(fu \in C) \to B \subseteq C\big) : \tag{29}$$

Sei C so, dass

$$\begin{aligned} &v \in C, \\ &\forall u \in C(fu \in C). \end{aligned} \tag{30}$$

Wir zeigen, dass

$$B \subseteq C.$$

Behauptung 2 *Für alle $n \in \omega$ gilt:*

$$\forall g \forall y\big(\beta(n, g) \wedge \gamma(g) \wedge \langle 0, v\rangle \in g \wedge \langle n, y\rangle \in g \to y \in C\big) \tag{31}$$

Beweis der Behauptung 2: Wir zeigen das mit Induktion.

Induktionsverankerung $n = 0$**:** Seien g, y so, dass $\beta(0, g) \wedge \gamma(g) \wedge \langle 0, v\rangle \in g \wedge \langle 0, y\rangle \in g$. Aus (21) folgt, dass $v = y$. Wegen $v \in C$ gilt daher $y \in C$. Also gilt (31) für $n = 0$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \omega$ so, dass (31) gilt. Seien g', y so, dass

$$\beta(\mathrm{s}\, n, g') \wedge \gamma(g') \wedge \langle 0, v\rangle \in g' \wedge \langle \mathrm{s}\, n, y\rangle \in g'. \tag{32}$$

Wir definieren

$$g := g' \backslash \{\langle \mathrm{s}\, n, y\rangle\}.$$

Ein Induktionsargument zeigt, dass es ein u gibt, sodass

$$\langle n, u\rangle \in g \subseteq g'. \tag{33}$$

Es gilt $\beta(n, g) \wedge \gamma(g) \wedge \langle 0, v\rangle \in g$. Aus unserer Induktionsannahme folgt daher, dass $u \in C$. Gemäss (30) gilt daher, dass

$$fu \in C. \tag{34}$$

Gemäss (32) gilt $\beta(\mathrm{s}\,n, g')$ und daher wegen (20,33), dass

$$\langle \mathrm{s}\,n, fu\rangle \in g'.$$

Gemäss (32) gilt auch

$$\langle \mathrm{s}\,n, y\rangle \in g'.$$

Gemäss (32) gilt $\gamma(g')$. Mittels (21) folgt daher, dass

$$fu = y.$$

Indem wir das mit (34) kombinieren, erhalten wir

$$y \in C.$$

Also gilt (31) für $\mathrm{s}\,n$. Das zeigt den Induktionsschritt.

Behauptung 2 folgt nun mittels Induktion. □

Sei $y \in B$. Gemäss (28) gibt es ein $n \in \omega$, sodass $\varphi(n, y)$ gilt. Gemäss (27) gibt es ein g, sodass $\delta(n, g)$ gilt und $\langle n, y\rangle \in g$. Mittels Behauptung 2 folgt daraus, dass $y \in C$. Das zeigt, dass

$$B \subseteq C.$$

Somit erfüllt B die Bedingung (29) und damit alle Bedingungen von (18). Das zeigt (18).

6. **(∗) (Ordinalzahl $\omega + \omega$)** Wir schreiben $\omega + 1 := \mathrm{s}\,\omega = \omega \cup \{\omega\}$, $\omega + 2 := (\omega + 1) + 1, \ldots$. Formalisieren Sie die Aussage, dass die Menge

$$\big\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\big\} \tag{35}$$

existiert. Beweisen Sie diese Aussage.

Hinweis: Verwenden Sie **5**.

Bemerkungen:

- Da die Menge (35) existiert, existiert auch die Menge

$$\omega \cdot 2 := \omega + \omega := \omega \cup \big\{\omega, \omega + 1, \ldots\big\} = \big\{0, 1, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots\big\}.$$

- Diese Menge ist eine Ordinalzahl. Das folgt aus **3**.a.

Lösung:

Die Menge $\big\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\big\}$ existiert.

Formalisierung dieser Aussage:

$$\exists B\Big(\omega \in B \wedge \forall u \in B(\mathrm{s}\,u \in B) \wedge \forall C\big(\omega \in C \wedge \forall u \in C(\mathrm{s}\,u \in C) \to B \subseteq C\big)\Big) \tag{36}$$

Diese Aussage folgt aus **5**. mit $f :\equiv \mathrm{s}$ und $v := \omega$.

7. **($*$) (Fundierungsaxiom)** Zeigen Sie, dass in ZF gilt:

$$\forall z(z \notin z)$$

Hinweis: Verwenden Sie das Paarmengen- und Fundierungsaxiom.

Lösung: Erinnerung: Wir definieren

$$\varphi(x) :\equiv x \neq \varnothing \to \exists y\big(y \in x \wedge (y \cap x = \varnothing)\big).$$

Das Fundierungsaxiom besagt:

$$\mathsf{ZF}_8 :\equiv \forall x \varphi(x)$$

Behauptung 3 *Wir nehmen an, dass die Axiome $\mathsf{ZF}_0, \ldots, \mathsf{ZF}_7$ gelten und es ein z gibt mit $z \in z$. Dann gilt ZF_8 nicht.*

Beweis der Behauptung 3: Wir wählen ein solches z und definieren $x := \{z\}$. Da $z \in x$, gilt

$$x \neq \varnothing.$$

Sei $y \in x$. Dann gilt $y = z$. Gemäss unserer Annahme $z \in z$ gilt also $z \in y$ und daher $z \in x \cap y$. Also ist $x \cap y$ nicht leer. Es folgt, dass $\varphi(x)$ nicht gilt. Daher gilt ZF_8 nicht. Das beweist Behauptung 3. $\square$

Mittels Kontraposition folgt aus dieser Behauptung: Falls $\mathsf{ZF}_0, \ldots, \mathsf{ZF}_8$ gelten, dann gilt:

$$\forall z(z \notin z)$$