Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

8.1. reelle Zahl, Dedekind-Schnitt In dieser Aufgabe verwenden wir die Notationen aus der Vorlesung. Für jede rationale Zahl r bezeichnet $\mathbf{r}$ zum Beispiel die reelle Zahl (d. h. den Dedekind-Schnitt)

$$\mathbf{r} := \left\{ s \in \mathbb{Q} \,\middle|\, s > r \right\} \in \mathbb{R}.$$

(a) **(∗)** Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{1} + \mathbf{2} = \mathbf{3}. \tag{1}$$

Tipps:

- Zeigen Sie, dass in (1) die Inklusionen $\subseteq$ und $\supseteq$ gelten.
- Um $\supseteq$ zu zeigen, betrachten Sie zu gegebenem rationalem $t > 3$ die rationalen Zahlen
$$r := 1 + \frac{t-3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{t}{2}, \qquad s := 2 + \frac{t-3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{t}{2}.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}. \tag{2}$$

Tipps:

- Zeigen Sie, dass in (2) die Inklusionen $\subseteq$ und $\supseteq$ gelten.
- Um $\supseteq$ zu zeigen, betrachten Sie zu gegebenem rationalem $t \in \mathbf{1}$ die rationalen Zahlen
$$r := \frac{t+1}{2}, \qquad s := \frac{t}{r}.$$
Zeigen Sie, dass $r, s \in \mathbf{1}$. Folgern Sie, dass in (2) die Inklusion $\supseteq$ gilt.

(c) **(∗)** Wir definieren

$$\sqrt{\mathbf{2}} := \left\{ r \in \mathbb{Q} \,\middle|\, r \geq 0,\, r^2 > 2 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\sqrt{\mathbf{2}}$ eine reelle Zahl ist, d. h. ein Dedekind-Schnitt.

Tipp: Die letzte Bedingung in der Definition eines Dedekind-Schnittes x besagt, dass

$$\forall r \in x \exists s_0 \in x : s_0 < r.$$

Zu gegebenem $r \in x$ betrachten Sie $s_0 := \dfrac{2r+2}{r+2}$.

Lösung.

(a) Beweis von (1)**:**

- $\mathbf{1+2} \subseteq \mathbf{3}$: Sei $t \in \mathbf{1+2}$. Das bedeutet, dass es $r \in \mathbf{1}$ und $s \in \mathbf{2}$ gibt mit $t = r + s$. Da $r > 1$ und $s > 2$, folgt $t = r + s > 3$, also $t \in \mathbf{3}$. Damit ist die Inklusion $\subseteq$ gezeigt.
- $\mathbf{3} \subseteq \mathbf{1+2}$: Sei $t > 3$ und definiere $r := 1 + \frac{t-3}{2}$ und $s := 2 + \frac{t-3}{2}$. Dann gilt $r > 1$, $s > 2$ und $t = r + s$. Also $t \in \mathbf{1+2}$, womit die Inklusion $\mathbf{3} \subseteq \mathbf{1+2}$ gezeigt ist.

Damit gilt $\mathbf{1+2} = \mathbf{3}$.

Bemerkung: Allgemein gilt für alle $r_0, s_0 \in \mathbb{Q}$, dass

$$\mathbf{r_0 + s_0} = \text{ (Box von } r_0 + s_0) := \left\{ t \in \mathbb{Q} \,\middle|\, t > r_0 + s_0 \right\}.$$

Das folgt aus einem Argument wie dem obigen. Für die Inklusion "$\supseteq$" betrachten wir zu einem gegebenen $t \in$ (Box von $r_0 + s_0$) die Zahlen

$$r := r_0 + \frac{t - (r_0 + s_0)}{2}, \qquad s := s_0 + \frac{t - (r_0 + s_0)}{2}.$$

Im Fall $r_0, s_0 > 0$ können wir alternativ die Zahlen

$$r := \frac{r_0}{r_0 + s_0} t, \qquad s := \frac{s_0}{r_0 + s_0} t$$

betrachten. Im obigen Fall $r_0 := 1$, $s_0 := 2$ können wir für den Beweis der Inklusion $\mathbf{3} \subseteq \mathbf{1+2}$ zu gegebenem $t > 3$ also alternativ die Zahlen

$$r := \frac{t}{3}, \qquad s := \frac{2t}{3}$$

betrachten.

(b) Beweis von (2)**:**

- $\mathbf{1 \bullet 1} \subseteq \mathbf{1}$: Sei $t \in \mathbf{1 \bullet 1}$. Das bedeutet, dass es $r, s \in \mathbf{1}$ gibt mit $t = r \cdot s$. Da $r > 1$ und $s > 1$, folgt $t = r \cdot s > 1$, also $t \in \mathbf{1}$. Damit ist die Inklusion $\subseteq$ gezeigt.
- **Beweis der Inklusion $\mathbf{1} \subseteq \mathbf{1 \bullet 1}$**: Sei $t \in \mathbf{1}$. Wir setzen

  $$r := \frac{t+1}{2}, \qquad s := \frac{t}{r}.$$

  Es gilt $t > 1$, deshalb $t + 1 > 2$, also $r > 1$ und darum $r \in \mathbf{1}$. Es gilt $2t > t + 1$, darum $s = \frac{2t}{t+1} > 1$ und deshalb $s \in \mathbf{1}$. Da $t = rs$, folgt, dass $t \in \mathbf{1 \bullet 1}$. Das zeigt die Inklusion $\mathbf{1} \subseteq \mathbf{1 \bullet 1}$.

(c) Beweis, dass $\sqrt{\mathbf{2}}$ ein Dedekind-Schnitt ist:

- $\sqrt{\mathbf{2}} \neq \emptyset$: Die Zahl $r := 2$ erfüllt $r \in \mathbb{Q}$, $r \geq 0$ und $r^2 = 4 > 2$. Daher gilt $r \in \sqrt{\mathbf{2}}$. Daraus folgt, dass $\sqrt{\mathbf{2}} \neq \emptyset$.
- $\sqrt{\mathbf{2}} \neq \mathbb{Q}$: Die Zahl $r := 1$ erfüllt $r \in \mathbb{Q}$, $r^2 = 1 \not> 2$ und daher $r \notin \sqrt{\mathbf{2}}$. Daraus folgt, dass $\sqrt{\mathbf{2}} \neq \mathbb{Q}$.
- $\forall r \in x := \sqrt{\mathbf{2}}\, \forall s \in \mathbb{Q} : s > r \Rightarrow s \in x$: Sei $r \in \sqrt{\mathbf{2}}$ und $s \in \mathbb{Q}$ so, dass $s > r$. Da $r \geq 0$, gilt $s \geq 0$. Des Weiteren gilt $s^2 > r^2 > 2$. Es folgt, dass $s \in \sqrt{\mathbf{2}}$.
- Wir zeigen, dass
$$\forall r \in x := \sqrt{\mathbf{2}}\, \exists s_0 \in x : \ s_0 < r. \tag{3}$$
Sei $r \in \sqrt{\mathbf{2}}$. Wir definieren $s_0 := \frac{2r+2}{r+2}$. Da $r \geq 0$, gilt
$$s_0 \geq 0. \tag{4}$$
Es gilt
$$\begin{aligned}(2r+2)^2 &= 4r^2 + 8r + 4 \\ &> 2\big(r^2 + 4r + 4\big) \qquad (\text{da } r^2 > 2) \\ &= 2(r+2)^2\end{aligned}$$
und daher
$$s_0^2 = \left(\frac{2r+2}{r+2}\right)^2 > 2. \tag{5}$$
Da $r^2 > 2$, gilt $r(r+2) > 2r+2$ und daher
$$r > \frac{2r+2}{r+2} = s_0. \tag{6}$$
Wegen (4,5,6) hat s_0 die gewünschten Eigenschaften, d. h. die Bedingung (3) ist erfüllt.

Somit ist $\sqrt{\mathbf{2}}$ ein Dedekind-Schnitt, d. h. eine reelle Zahl.

8.2. lesen Lesen Sie den Rest des Beweises der Proposition aus der Vorlesung, die besagt, dass $(\sqrt{\mathbf{2}})^2 = \mathbf{2}$. Stellen Sie Fragen, falls Sie welche haben.

Lösung. Haben Sie den Beweis gelesen?

8.3. Vollständigkeit der reellen Zahlen, Existenz des Supremums Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge. Der erste Teil eines Satzes aus der Vorlesung (Vollständigkeit der reellen Zahlen) besagt, dass A ein Supremum besitzt. Das Ziel dieser Aufgabe ist, diesen Teil unter einer gewissen Bedingung zu beweisen. Dazu definieren wir

$$b := \bigcap A = \bigcap_{x \in A} x = \Big\{ r \in \mathbb{Q} \,\Big|\, \forall x \in A : \, r \in x \Big\}. \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass b ein Supremum für A, d. h. eine kleinste obere Schranke, ist, falls

$$\nexists r \in \mathbb{Q} : \, b = \Big\{ s \in \mathbb{Q} \,\Big|\, s \geq r \Big\}. \tag{8}$$

Tipps:

- Zeigen Sie, dass b eine reelle Zahl, d. h. ein Dedekind-Schnitt ist. Überprüfen Sie dazu die Bedingungen in der Definition eines Dedekind-Schnittes. Für die Bedingung $b \neq \emptyset$ verwenden Sie zum Beispiel, dass A nach oben beschränkt ist.
- Zeigen Sie, dass b eine obere Schranke für A ist.
- Zeigen Sie, dass jede obere Schranke für A grösser gleich b ist.
- Folgern Sie daraus, dass A ein Supremum besitzt.

Bemerkungen:

1. Der zweite Teil des zitierten Satzes aus der Vorlesung (Vollständigkeit der reellen Zahlen) besagt, dass jede nach *unten* beschränkte nichtleere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ein Infimum besitzt. Wir zeigen dazu, dass $b := \bigcup A$ ein Infimum ist. Der Beweis davon ist analog zu den obigen Tipps.
2. Dass jede nichtleere nach *oben* beschränkte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ein Supremum besitzt, können wir alternativ dadurch zeigen, dass wir den zweiten Teil des zitierten Satzes auf die Menge

$$-A := \Big\{ -a \,\Big|\, a \in A \Big\}$$

anwenden.

Lösung.

(a) **Behauptung:** b ist ein Dedekind-Schnitt. **Beweis:**

- Bedingung $b \neq \emptyset$: Gemäss Annahme gibt es eine obere Schranke $c \in \mathbb{R}$ für A. Sei $x \in A$. Dann gilt $c \geq x$, d. h. $c \subseteq x$. Mit Hilfe von (7) folgt daraus, dass $c \subseteq b$. (Warum?) Da c ein Dedekind-Schnitt ist, ist c nicht leer. Es folgt, dass $b \neq \emptyset$.

- Bedingung $b \neq \mathbb{Q}$: Gemäss Annahme ist A nicht leer, d. h., es gibt ein $x \in A$. Da x ein Dedekind-Schnitt ist, gilt $x \neq \mathbb{Q}$. Gemäss (7) gilt $b \subseteq x$. Daraus folgt, dass $b \neq \mathbb{Q}$.
- Bedingung $\forall r \in b \forall s \in \mathbb{Q} : s > r \Rightarrow s \in b$: Seien $r \in b$ und $s \in \mathbb{Q}$, sodass $s > r$. Sei $x \in A$. Gemäss (7) gilt $r \in x$. Da x ein Dedekind-Schnitt ist und $s > r$, folgt daraus, dass $s \in x$. Mit Hilfe von (7) folgt, dass $s \in b$, wie gewünscht.
- Bedingung $\forall r \in b \exists s_0 \in b : s_0 < r$: Sei $r \in b$. Gemäss unserer Annahme (8) gilt

  $$b \neq S := \left\{ s \in \mathbb{Q} \,\middle|\, s \geq r \right\}. \tag{9}$$

  Es gilt $S \subseteq b$. (Warum?) Wegen (9) gilt daher $b \not\subseteq S$, d. h., $\exists s_0 \in b \setminus S$. Es gilt $s_0 < r$, wie gewünscht.

Das beweist die Behauptung, dass b ein Dedekind-Schnitt, d. h. eine reelle Zahl, ist.

(b) **Behauptung:** b ist obere Schranke für A.

Beweis: Sei $x \in A$. Gemäss (7) gilt $b \subseteq x$, d. h. $b \geq x$. Das beweist die Behauptung, dass b eine obere Schranke für A ist.

(c) **Behauptung:** Jede obere Schranke c für A erfüllt $c \geq b$.

Beweis: Sei $x \in A$. Dann gilt $c \geq x$, d. h. $c \subseteq x$. Mit Hilfe von (7) folgt daraus, dass $c \subseteq b$, d. h. $c \geq b$. Das beweist die Behauptung.

(d) Da b eine obere Schranke für A ist und jede obere Schranke für A grösser gleich b ist, ist b eine kleinste obere Schranke, d. h. ein Supremum, für A.

Zur Vereinfachung benützen wir ab jetzt die normale Schriftstärke für den zu einer rationalen Zahl r gehörenden Dedekind-Schnitt $\mathbf{r}$, für die Ordnung $\boldsymbol{\leq}$ auf den reellen Zahlen usw. Wir schreiben jetzt

$$\mathbf{r} \qquad \boldsymbol{\leq} \qquad \boldsymbol{+} \qquad \boldsymbol{-} \qquad \boldsymbol{\cdot}$$

also als

$$r \qquad \leq \qquad + \qquad - \qquad \cdot$$

Wie üblich lassen wir das Produktzeichen $\cdot$ manchmal weg.

8.4. Supremum und Infimum bestimmen

- Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum jeder der folgenden Mengen.
- Bestimmen Sie, ob die Menge ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

1.) **(*)** $A := \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

2.) $B := \left\{ \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in (1,2] \right\}$.

3.) $C := \left\{ \frac{x}{x+1} \,\middle|\, x \in [2,\infty) \right\}$.

Lösung.

1.) Es gilt $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$ und deswegen

- $\inf A = 0$
- $\sup A = 1$

Die Menge A besitzt kein Minimum, da $\inf A = 0 \notin A$.

Sie besitzt ein Maximum, da $\sup A = 1 \in A$.

2.) Es gilt $B = \left\{ \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in (1,2] \right\} = \left[\frac{1}{2}, 1 \right)$ und deswegen

- $\inf B = \frac{1}{2}$
- $\sup B = 1$

Die Menge B besitzt ein Minimum, da $\inf B = \frac{1}{2} \in B$.

Sie besitzt kein Maximum, da $\sup B = 1 \notin B$.

3.) Es gilt $C = \left\{ \frac{x}{x+1} \,\middle|\, x \in [2,\infty) \right\} = \left[\frac{2}{3}, 1 \right)$ und deswegen

- $\inf C = \frac{2}{3}$
- $\sup C = 1$

Die Menge C besitzt ein Minimum, da $\inf C = \frac{2}{3} \in C$.

Sie besitzt kein Maximum, da $\sup C = 1 \notin C$.

8.5. Supremum und Infimum der Menge $-A$ Es sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge. Wir definieren:

$$-A := \left\{ -a \;\middle|\; a \in A \right\}$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \inf(-A) = -\sup A$$

Lösung. Wir zeigen zuerst die erste Gleichung: $\sup(-A) = -\inf A$. Es sei u eine untere Schranke von A. Dann gilt:

$$\forall a \in A: \quad u \leq a.$$

Folglich gilt auch

$$\forall a \in A: \quad -u \geq -a$$

Dies impliziert nun, dass $-u$ eine obere Schranke von $-A$ ist. Da insbesondere $\inf A$ eine untere Schranke von A ist, folgt somit, dass $-\inf A$ eine obere Schranke von $-A$ ist. Da $\sup(-A)$ die kleinste obere Schranke von $-A$ ist, muss gelten

$$\sup(-A) \leq -\inf A$$

Sei nun o eine obere Schranke von $-A$. Mit demselben Argument wie oben zeigt man, dass $-o$ eine untere Schranke von A ist. Daher ist insbesondere $-\sup(-A)$ eine untere Schranke von A, also

$$-\sup(-A) \leq \inf A$$

Multiplikation beider Seiten mit -1 dreht die Ungleichung um und ergibt:

$$\sup(-A) \geq -\inf A$$

Damit können wir nun schliessen:

$$\sup(-A) = -\inf A$$

Die zweite Gleichung, $\inf(-A) = -\sup(A)$ folgt nun aus der ersten Gleichung unter Verwendung von $-(-A) = A$:

$$\sup(A) = \sup(-(-A)) = -\inf(-A).$$

Multiplikation mit -1 ergibt die gesuchte Gleichung.

Alternativ kann man analog zum Beweis der ersten Gleichung vorgehen.