Musterlösung Serie 9

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (∗) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0. **(natürliche Zahlen und ω sind Ordinalzahlen)** Wir definieren den Begriff einer Ordinalzahl wie folgt. Sei A eine Menge und R eine binäre Relation auf A.

Definition 1 (lineare Ordnung, Wohlordnung, Ordinalzahl)

- *(Trichotomie) Wir sagen, dass R* Trichotomie *erfüllt g. d. w. für alle $x, y \in A$ gilt:*

$$\text{entweder } xRy \text{ oder } x = y \text{ oder } yRx \tag{1}$$

(ausschliessendes Oder)

- *(lineare Ordnung) R heisst (*strikte*)* lineare Ordnung *(*auf *A) g. d. w. R transitiv ist und Trichotomie erfüllt.*
- *(minimales Element) Sei R eine lineare Ordnung auf A und $S \subseteq A$. Ein Element $x \in S$ heisst (R-)*minimal *g. d. w. für jedes $y \in S \setminus \{x\}$ gilt xRy.*
- *(Wohlordnung) R heisst* Wohlordnung *(*auf *A) g. d. w. R eine lineare Ordnung ist und jede nichtleere Teilmenge $S \subseteq A$ ein R-minimales Element besitzt. In diesem Fall nennen wir A R-*wohlgeordnet.
- *(Ordinalzahl) Wir schreiben*

$$\in_A := \{\langle x, y\rangle \in A \times A \,|\, x \in y\}.$$

Die Menge A heisst Ordinalzahl *g. d. w. sie $\in_A$-wohlgeordnet ist.*

Motivation: Der Begriff einer Ordinalzahl präzisiert und verallgemeinert die intuitive Idee der Position in einer Liste. Ein zentraler Aspekt ist hierbei, dass wir je zwei Positionen miteinander vergleichen können. Die Positionen sind also linear geordnet.

Jede natürliche Zahl n ist eine Ordinalzahl. (Siehe **0**.b.) Sie entspricht der intuitiven Idee der n-ten Position. Wir identifizieren also $n = 0, 1, 2, \ldots$ mit den Wörtern "nullter, erster, zweiter, …".[1] Die Menge ω der natürlichen Zahlen ist ebenfalls eine Ordinalzahl. (Siehe **0**.a.) Sie ist grösser (bezüglich der linearen Ordnung $\in$) als jede natürliche Zahl. Es gibt viele noch grössere Ordinalzahlen, zum Beispiel

$$\omega + 1 := \mathrm{s}(\omega) = \omega \cup \{\omega\}, \quad \omega + 2 := \mathrm{s}(\mathrm{s}(\omega)), \quad \ldots, \quad \omega + \omega = \omega \cdot 2, \quad \ldots, \quad \omega \cdot 3,$$
$$\ldots, \quad \omega \cdot \omega = \omega^2, \quad \ldots, \quad \omega^3, \quad \ldots, \quad \omega^\omega, \quad \ldots, \quad \omega^{\omega^\omega} = \omega^{(\omega^\omega)}, \quad \ldots$$

Für die Definition dieser Ordinalzahlen siehe S. 166 in:

L. Halbeisen und R. Krapf, *Gödel's theorems and Zermelo's axioms—a firm foundation of mathematics*, Birkhäuser/Springer, Cham, 2020.

Für $\omega + \omega$ siehe auch **1**. Zur Illustration siehe Abbildung 1.

---

[1] Wir fangen hier bei 0 mit Zählen an.

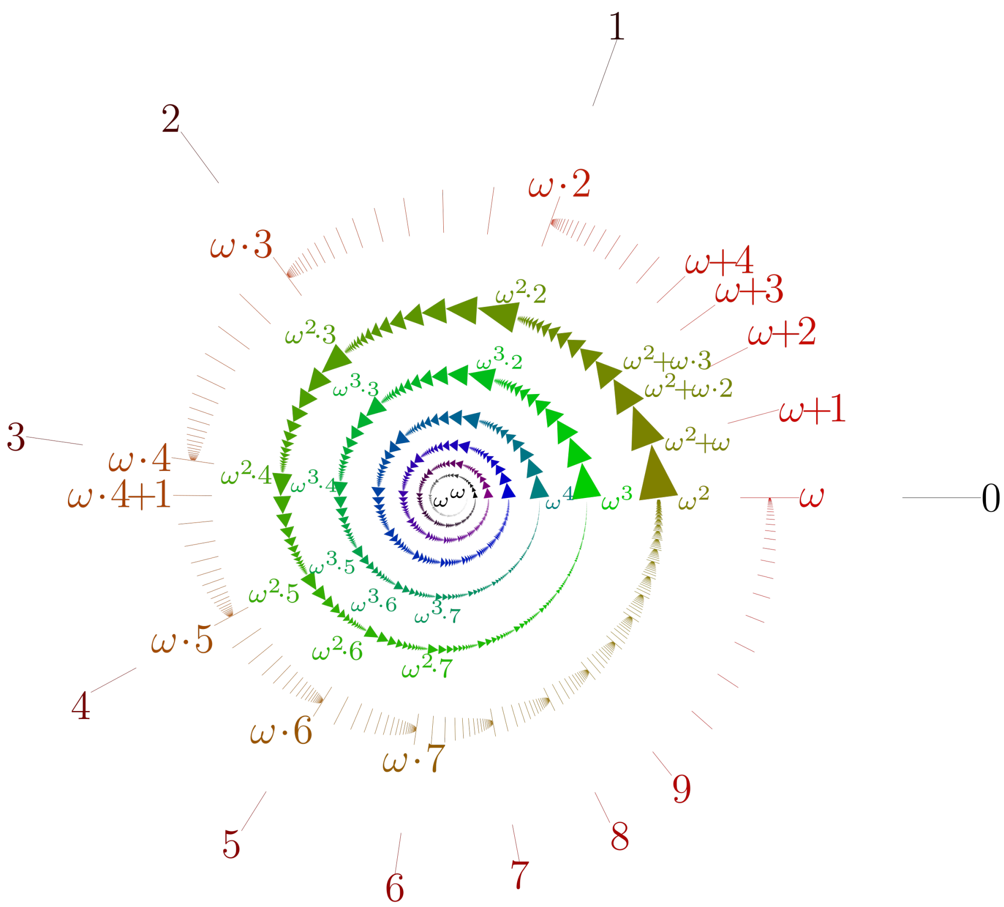

Abbildung 1: Die Ordinalzahlen $0,\ 1,\ \ldots,\ \omega,\ \omega+1,\ \ldots,\ \omega\cdot 2,\ \ldots,\ \omega^2,\ \ldots,\ \omega^\omega$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge ω der natürlichen Zahlen eine Ordinalzahl ist.

Hinweise:

i. Transitivität von $\in_\omega$: Verwenden Sie Induktion. Siehe eine Aufgabe aus Übungsserie 7 (das Induktionsprinzip von ZF).

ii. Trichotomie für $\in_\omega$: Wir schreiben

$$\varphi :\equiv m \in n \vee m = n \vee n \in m.$$

Beweis von $\forall m, n \in \omega\, \varphi$: Wir definieren:

$$S_n := \{m \in \omega \mid \varphi\} \qquad (\text{für } n \in \omega) \tag{2}$$

Zeigen Sie wie folgt mittels Induktion, dass für jedes $n \in \omega$ gilt $S_n = \omega$:

- Zeigen Sie mittels Induktion, dass $S_0 = \omega$.
- **Hilfssatz 2** *Für alle $n \in \omega$ und $m \in n$ gilt $n \not\subseteq m$.*
  Beweis des Hilfssatzes: Wir betrachten die Menge

  $$A := \{n \in \omega \mid \forall m \in n (n \not\subseteq m)\}.$$

  Zeigen Sie mittels Induktion, dass $A = \omega$.

  Wir nehmen an, dass $S_n = \omega$. Zeigen Sie mittels Induktion, dass $S_{\mathrm{s}\,n} = \omega$. Induktionsschritt: Sei $m \in S_{\mathrm{s}\,n}$. Wir zeigen, dass

  $$\mathrm{s}\,m \in S_{\mathrm{s}\,n}.$$

  Fall $m \in \mathrm{s}\,n = n \cup \{n\}$**:**

  Unterfall: $m \in n$**:** Dann gilt

  $$n \notin \mathrm{s}\,m.$$

  Das folgt aus Transitivität von $\in_\omega$ (siehe **0**.a) und Hilfssatz 2. Wegen unserer Annahme $S_n = \omega$ gilt $\mathrm{s}\,m \in S_n$. Mittels (2) folgt, dass $n = \mathrm{s}\,m$ oder $\mathrm{s}\,m \in n$.

iii. Trichotomie für $\in_\omega$: Beweis, dass für alle $m, n \in \omega$ höchstens eine der Aussagen $m \in n$, $m = n$, $n \in m$ gilt: Verwenden Sie **0**.(a)i und Hilfssatz 2.

iv. $\in_\omega$ ist Wohlordnung: Zeigen Sie mittels Induktion, dass jede nichtleere Teilmenge einer natürlichen Zahl ein $\in$-kleinstes Element besizt.
Sei jetzt $S \subseteq \omega$ nichtleer. Wir wählen ein $n \in S$. Betrachten Sie $S \cap \mathrm{s}\,n$.

Lösung:

i. **Transitivität von** $\in_\omega$: Wir betrachten die Formel

$$\varphi :\equiv \forall m \in n (m \subseteq n)$$

Hilfssatz 3 *Es gilt:*

$$\forall n \in \omega\, \varphi$$

Aus diesem Hilfssatz folgt, dass $\in_\omega$ transitiv ist. (Überprüfen Sie das!)

Beweis des Hilfssatzes 3: Wir zeigen das mit Induktion.

Induktionsverankerung: $\varphi(n = 0 = \varnothing)$ gilt.

Induktionsschritt: Sei $n \in \omega$ so, dass $\varphi(n)$ gilt. Sei $m \in \mathrm{s}\, n$.

Fall $m \in n$**:** Wegen $\varphi(n)$ gilt dann $m \subseteq n \subseteq n \cup \{n\} = \mathrm{s}\, n$.

Fall $m = n$**:** Dann gilt $m = n \subseteq \mathrm{s}\, n$.

Die die beiden Fälle alle Möglichkeiten abdecken, gilt immer $m \subseteq \mathrm{s}\, n$. Daher gilt $\varphi(\mathrm{s}\, n)$. Das zeigt den Induktionsschritt.

Mittels Induktion folgt, dass für jedes $n \in \omega$ $\varphi(n)$ gilt. Das beweist Hilfssatz 3. □

ii. **Trichotomie für** $\in_\omega$**:** Wir schreiben

$$\varphi :\equiv m \in n \vee m = n \vee n \in m.$$

Behauptung:

$$\forall m, n \in \omega\, \varphi \tag{3}$$

Beweis der Behauptung: Wir definieren:

$$S_n := \left\{m \in \omega \,\middle|\, \varphi\right\} \qquad \text{(für } n \in \omega\text{)} \tag{4}$$

Wir zeigen mittels Induktion, dass

$$\forall n \in \omega (S_n = \omega) \tag{5}$$

- **Induktionsverankerung** $n = 0$**:** Wir zeigen mittels Induktion, dass $S_0 = \omega$, d. h.

  $$\forall m \in \omega (m \in S_0). \tag{6}$$

  Induktionsverankerung: Es gilt $\varphi(m = 0, n = 0)$ und darum $m = 0 \in S_0$.

  Induktionsschritt: Sei $m \in S_0$. Es gilt $m \notin \varnothing = 0$. Da $m \in S_0$, gilt $\varphi(m, 0)$ und daher $m = 0$ oder $0 \in m$. In beiden Fällen gilt $0 \in \mathrm{s}\, m$ und daher $\varphi(\mathrm{s}\, m, 0)$, also $\mathrm{s}\, m \in S_0$. Das beweist den Induktionsschritt.

  Mittels Induktion folgt (6), d. h.

  $$S_0 = \omega.$$

  (Zur Induktion siehe eine Aufgabe aus Übungsserie 7 (das Induktionsprinzip von ZF).) Das zeigt die Induktionsverankerung $n = 0$ im Beweis von (5).
- **Induktionsschritt** $n \to \mathrm{s}\, n$ **im Beweis von** (5)**:** Wir benötigen das Folgende.

  Hilfssatz 4 *Für alle $n \in \omega$ und $m \in n$ gilt $n \nsubseteq m$.*

Beweis des Hilfssatzes 4: Wir betrachten die Menge

$$A := \{n \in \omega \mid \forall m \in n (n \nsubseteq m)\}.$$

Wir zeigen mittels Induktion, dass $A = \omega$.

Induktionsverankerung: Es gilt $0 = \varnothing \in A$. (Warum?)

Induktionsschritt: Sei $n \in A$. Sei

$$m \in \mathrm{s}\, n.$$

Fall $m \in n$: Dann gilt gemäss Induktionsannahme $n \in A$, dass $n \nsubseteq m$ und daher

$$\mathrm{s}\, n = n \cup \{n\} \nsubseteq m.$$

Fall $m = n$: Da $n \in A$, gilt dann, dass $m \notin n$, also $\{n = m\} \nsubseteq n = m$. Daraus folgt, dass

$$\mathrm{s}\, n = n \cup \{n\} \nsubseteq m.$$

Da die beiden Fälle alle Möglichkeiten abdecken, gilt also immer $\mathrm{s}\, n \nsubseteq m$. Daraus folgt, dass $\mathrm{s}\, n \in A$. Das beweist den Induktionsschritt.

Mittels Induktion folgt, dass $A = \omega$. Die Aussage des Hilfssatzes 4 folgt. □

Korollar 5 *Für alle* $m, n \in \omega$ *gilt*

$$m \in n \to n \notin m, \tag{7}$$

$$m \notin m \tag{8}$$

Beweis des Korollars 5: (7): Wir nehmen an, dass $m \in n$. Aus **0**.(a)i (Transitivität von $\in_\omega$) folgt, dass $m \subseteq n$. Mittels Hilfssatz 4 folgt daraus, dass $n \notin m$. Das beweist (7).
(8) folgt aus $m \subseteq m$ und Hilfssatz 4. Das beweist Korollar 5. □

Induktionsschritt $n \to \mathrm{s}\, n$ **im Beweis von** (5)**:** Sei $n \in \omega$ so, dass

$$S_n = \omega.$$

Wir zeigen mittels Induktion, dass $S_{\mathrm{s}\, n} = \omega$, d. h.

$$\forall m \in \omega\, \varphi(m, \mathrm{s}\, n). \tag{9}$$

Induktionsverankerung $m = 0$**:** Gemäss unserer Induktionsannahme $S_n = \omega$ gilt $m = 0 \in S_n$, also $\varphi(0, n)$.

Fall $n = 0$: Dann gilt $0 \in \mathrm{s}\, n$, also $\varphi(0, \mathrm{s}\, n)$ und daher $0 \in S_{\mathrm{s}\, n}$.

Fall $n \neq 0$: Dann gilt $n \notin 0$. Wegen $\varphi(0, n)$ gilt daher $0 \in n \subseteq \mathrm{s}\, n$, also $\varphi(0, \mathrm{s}\, n)$ und daher $0 \in S_{\mathrm{s}\, n}$.

In jedem Fall gilt also $0 \in S_{\mathrm{s}\,n}$. Das zeigt die Induktionsverankerung $m = 0$.

Induktionsschritt: Sei

$$m \in S_{\mathrm{s}\,n}.$$

Wir zeigen, dass

$$\mathrm{s}\,m \in S_{\mathrm{s}\,n}. \tag{10}$$

Fall $m \in \mathrm{s}\,n = n \cup \{n\}$**:**

Unterfall $m \in n$**:** Aus Korollar 5 folgt dann, dass

$$n \notin \mathrm{s}\,m. \tag{11}$$

Da $S_n = \omega$, gilt $\mathrm{s}\,m \in S_n$, d. h. $\varphi(\mathrm{s}\,m, n)$. Wegen (11) folgt daraus, dass $\mathrm{s}\,m \in n$ oder $\mathrm{s}\,m = n$, also $\mathrm{s}\,m \in \mathrm{s}\,n$. Daher gilt $\varphi(\mathrm{s}\,m, \mathrm{s}\,n)$ und daher (10).

Unterfall: $m = n$**:** Dann gilt $\mathrm{s}\,m = \mathrm{s}\,n$, daher $\varphi(\mathrm{s}\,m, \mathrm{s}\,n)$ und darum (10).

Da die beiden Unterfälle alle Möglichkeiten abdecken, gilt also im Fall $m \in \mathrm{s}\,n$ immer (10).

Fall $m = \mathrm{s}\,n$**:** Dann gilt $\mathrm{s}\,n \in m \cup \{m\} = \mathrm{s}\,m$, daher $\varphi(\mathrm{s}\,m, \mathrm{s}\,n)$ und darum (10).

Fall $\mathrm{s}\,n \in m$**:** Dann gilt $\mathrm{s}\,n \in \mathrm{s}\,m$, daher $\varphi(\mathrm{s}\,m, \mathrm{s}\,n)$ und darum (10).

Wegen unserer Induktionsannahme $m \in S_{\mathrm{s}\,n}$ decken die drei obigen Fälle alle Möglichkeiten ab. Bedingung (10) gilt also immer. Das zeigt den Induktionsschritt.

Mittels Induktion folgt (9). Das beweist den Induktionsschritt $n \to n+1$ im Beweis von (5). Mittels Induktion folgt, dass (5), d. h. (3).

iii. **Trichotomie für** $\in_\omega$**:** Aus Korollar 5 folgt, dass für alle $m, n \in \omega$ höchstens eine der Aussagen $m \in n$, $m = n$, $n \in m$ gilt.

iv. $\in_\omega$ **ist Wohlordnung:** Wir betrachten die Formel

$$\varphi(n) :\equiv \forall A\Big(A \subseteq n \wedge A \neq \varnothing \to \exists m \in A \forall \ell \in A \backslash \{m\} (m \in \ell)\Big).$$

Lemma 6 *Es gilt*

$$\forall n\, \varphi(n).$$

Beweis des Lemmas 6: Induktionsverankerung: Für $n = 0$ ist für jedes A die Bedingung $A \subseteq n \wedge A \neq \varnothing$ nicht erfüllt. Daher gilt $\varphi(n = 0)$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \omega$ so, dass $\varphi(n)$ gilt. Sei $A' \subseteq \mathrm{s}\,n$ eine nichtleere Teilmenge. Wir definieren

$$A := A' \cap n.$$

Fall: $A \neq \varnothing$**:** Gemäss Induktionsannahme $\varphi(n)$ gibt es dann ein $m \in A$, sodass $\forall \ell \in A \backslash \{m\} (m \in \ell)$. Es gilt

$$\forall \ell \in A' \backslash \{m\} (m \in \ell). \tag{12}$$

(Überprüfen Sie das!)

Fall: $A = \varnothing$**:** Da $A = A' \cap n$ und $A' \subseteq \mathrm{s}\,n = n \cup \{n\}$ nicht leer ist, gilt dann $m := n \in A'$. Da $A = \varnothing$, gilt $A' \backslash \{m\} = \varnothing$. Die Bedingung (12) ist daher erfüllt.

Da die beiden Fälle alle Möglichkeiten abdecken, gilt (12) also immer. Also ist $\varphi(\mathrm{s}\,n)$ erfüllt. Das zeigt den Induktionsschritt.

Mittels Induktion folgt, dass $\forall n \in \omega\, \varphi(n)$ gilt. Das beweist Lemma 6. □

Sei jetzt $S \subseteq \omega$ nichtleer. Wir wählen ein $n \in S$. Gemäss Lemma 6 besitzt $A := S \cap \mathrm{s}\,n$ ein $\in$-kleinstes Element m. Sei $\ell \in S \backslash \{m\}$.

Fall $\ell \in \mathrm{s}\,n$**:** Dann gilt $\ell \in A$ und daher $m \in \ell$.

Fall $\mathrm{s}\,n = \ell$**:** Dann gilt $m \in A \subseteq \mathrm{s}\,n = \ell$, also $m \in \ell$.

Fall $\mathrm{s}\,n \in \ell$**:** Wegen $m \in \mathrm{s}\,n$ und Transitivität (**0**.(a)i) gilt dann $m \in \ell$.

Wegen (3) (Trichotomie) decken die drei Fälle alle Möglichkeiten ab. Daher gilt immer $m \in \ell$. Die Menge S besitzt daher ein $\in_S$-kleinstes Element. Die Relation $\in_\omega$ ist daher eine Wohlordnung. Die Menge ω ist daher eine Ordinalzahl.

(b) **(natürliche Zahl ist Ordinalzahl)** Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl eine Ordinalzahl ist.

Hinweis: Verwenden Sie **0**.a.

Lösung:

- **Transitivität:** Wir benötigen den folgenden Hilfssatz.

  Hilfssatz 7 *Es gilt:*
  $$\forall n \in \omega (n \subseteq \omega)$$

  Beweis des Hilfssatzes 7: Wir definieren
  $$X := \{n \in \omega \,|\, n \subseteq \omega\}.$$

  Wir zeigen mittels Induktion, dass
  $$X = \omega.$$

  Es gilt
  $$X \subseteq \omega, \qquad \varnothing \in X. \tag{13}$$

  Behauptung: X ist induktiv.

  Beweis der Behauptung: Sei $n \in X$. Gemäss Definition von X gilt dann $n \subseteq \omega$ und $n \in \omega$, also $\mathrm{s}\,n = n \cup \{n\} \subseteq \omega$ und darum $\mathrm{s}\,n \in X$. Daher ist X induktiv. Das beweist die Behauptung.

Aus (13) und der Behauptung folgt mittels **??** (Induktion), dass $X = \omega$. Die Aussage des Hilfssatzes 7 folgt. □

Sei $n \in \omega$. Seien $x, y, z \in n$, sodass $x \in y$ und $y \in z$. Aus Hilfssatz 7 folgt, dass $x, y, z \in \omega$. Gemäss **0**.a ist $\in_\omega$ transitiv. Es folgt, dass $x \in z$. Daher ist $\in_n$ transitiv.

- **Trichotomie:** Sei $n \in \omega$. Seien $\ell, m \in n$. Aus Hilfssatz 7 folgt, dass $\ell, m \in \omega$. Gemäss **0**.a ist ω eine Ordinalzahl. Daher erfüllt es Trichotomie. Es folgt, dass das Tripel $(R, x, y) :\equiv (\in, \ell, m)$ die Bedingung (1) erfüllt. Da ℓ, m beliebig sind, folgt daraus, dass n Trichotomie erfüllt.
- **Wohlordnung:** Diese Bedingung ist gemäss Lemma 6 erfüllt.

Es folgt, dass jede natürliche Zahl eine Ordinalzahl ist.

1. **(∗) (Ordinalzahl $\omega + \omega$)** Wir schreiben $\omega + 1 := \mathrm{s}\,\omega = \omega \cup \{\omega\}, \omega + 2 := (\omega + 1) + 1, \ldots$. Formalisieren Sie die Aussage, dass die Menge

$$\big\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\big\} \tag{14}$$

existiert. Beweisen Sie diese Aussage.

Hinweis: Verwenden Sie eine Aufgabe aus Übungsserie 7 (iterativ definierte Menge, Ersetzungsschema).

Bemerkungen:

- Da die Menge (14) existiert, existiert auch die Menge

$$\omega \cdot 2 := \omega + \omega := \omega \cup \big\{\omega, \omega + 1, \ldots\big\} = \big\{0, 1, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots\big\}.$$

- Diese Menge ist eine Ordinalzahl. Das folgt aus **0**.a.

Lösung:

$$\text{Die Menge} \quad \big\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\big\} \quad \text{existiert.}$$

Formalisierung dieser Aussage:

$$\exists B\Big(\omega \in B \wedge \forall u \in B(\mathrm{s}\,u \in B) \wedge \forall C\big(\omega \in C \wedge \forall u \in C(\mathrm{s}\,u \in C) \to B \subseteq C\big)\Big) \tag{15}$$

Diese Aussage folgt aus einer Aufgabe aus Übungsserie 7 (iterativ definierte Menge, Ersetzungsschema) mit $f :\equiv \mathrm{s}$ und $v := \omega$.