

Musterlösung Serie 12

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (*) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0. (*) **(Gleichmächtigkeit)** Wir nennen zwei Mengen X und Y *gleichmächtig* g. d. w. es eine Bijektion von X nach Y gibt. In diesem Fall schreiben wir $X \sim Y$. Beweisen Sie die folgende PROPOSITION.

PROPOSITION 1 In ZF gilt für alle X, Y, Z Mengen:

- (a) (Reflexivität) $X \sim X$
- (b) (Symmetrie) Falls $X \sim Y$, dann gilt $Y \sim X$.
- (c) (Transitivität) Falls $X \sim Y$ und $Y \sim Z$, dann gilt $X \sim Z$.

Lösung:

- (a) **Reflexivität:** Sei X eine Menge. Die Identität id_X ist eine Bijektion von X nach X . Daher gilt $X \sim X$. Also ist $\sim$ reflexiv.
 - (b) **Symmetrie:** Seien X, Y Mengen, sodass $X \sim Y$. Wir wählen eine Bijektion $\varphi : X \rightarrow Y$. Die Abbildung $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$ ist eine Bijektion. Daher gilt $Y \sim X$. Also ist $\sim$ symmetrisch.
 - (c) **Transitivität:** Seien X, Y, Z Mengen, sodass $X \sim Y$ und $Y \sim Z$. Wir wählen Bijektionen $\varphi : X \rightarrow Y$ und $\psi : Y \rightarrow Z$. Die Abbildung $\psi \circ \varphi$ ist eine Bijektion von X nach Z . Daher gilt $X \sim Z$. Also ist $\sim$ transitiv.
1. **(Präordnung auf der Allklasse)** Eine *Injektion* ist injektive Abbildung. Wir definieren

$$X \lesssim Y \quad :\leftrightarrow \quad \text{Es existiert eine Injektion von } X \text{ nach } Y.$$

Zeigen Sie, dass $\lesssim$ eine Präordnung auf der Allklasse¹ ist.

Lösung:

- (a) **Reflexivität:** Sei X eine Menge. Die Identität id_X ist eine Injektion von X nach X . Daher gilt $X \lesssim X$. Also ist $\lesssim$ reflexiv.
- (b) **Transitivität:** Seien X, Y, Z Mengen, sodass $X \lesssim Y$ und $Y \lesssim Z$. Wir wählen Injektionen $\varphi : X \rightarrow Y$ und $\psi : Y \rightarrow Z$. Die Abbildung $\psi \circ \varphi$ ist eine Injektion von X nach Z . Daher gilt $X \lesssim Z$. Also ist $\lesssim$ transitiv.

¹Die Allklasse ist die Klasse aller Mengen.

2. **(Jede natürliche Zahl ist kleiner als ω .)** Sei $n \in \omega$. Zeigen Sie, dass $n < \omega$, d. h. $n \lesssim \omega$ und $n \not\sim \omega$.

Hinweis für $n \not\sim \omega$: Verwenden Sie:

- ω ist Dedekind-unendlich, d. h. es gibt eine Injektion von ω nach ω , die nicht surjektiv ist.
- n ist Dedekind-endlich, d. h. nicht Dedekind-unendlich.

Hinweis: Hilfssatz in der Musterlösung zu einer Aufgabe in Übungsserie 11 (Gleichmächtigkeit von natürlichen Zahlen)

Lösung:

$n \lesssim \omega$: Gemäss einem THEOREM aus der Vorlesung (Klasse der Ordinalzahlen, Transitivität) gilt $n \subseteq \omega$. Die Inklusion von n nach ω ist eine Injektion. Daher gilt $n \lesssim \omega$.

$n \not\sim \omega$:

Behauptung 1 Die Nachfolger-Abbildung $s : \omega \rightarrow \omega$ ist injektiv.

Beweis der Behauptung 1: Seien $m, n \in \omega$, sodass $s(m) = s(n)$. Da $m \in s(n)$, gilt $m \in s(n) = n \cup \{n\}$ und daher $m \in n$ oder $m = n$. Analog gilt auch $n \in m$ oder $n = m$. Falls $m \neq n$, dann gilt also $m \in n$ und $n \in m$. Das widerspricht der Trichonomie für ω . (Siehe ein Hilfssatz in der Musterlösung zu einer Aufgabe in Übungsserie 9 (ω und jede natürliche Zahl sind Ordinalzahlen).) Daher gilt $m = n$. Darum ist s injektiv. Das beweist Behauptung 1. $\square$

Die Zahl $0 = \emptyset$ ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl. (Warum?) Die Abbildung $s : \omega \rightarrow \omega$ ist daher nicht surjektiv. Da sie gemäss Behauptung 1 injektiv ist, folgt, dass ω Dedekind-unendlich ist.

Sei $n \in \omega$. Gemäss einem Hilfssatz in der Musterlösung zu einer Aufgabe in Übungsserie 11 (Gleichmächtigkeit von natürlichen Zahlen) ist jede injektive Abbildung von n nach n surjektiv. Daher ist n nicht Dedekind-unendlich.

Bemerkung 2 [Dedekind-Unendlichkeit unter Gleichmächtigkeit erhalten] Seien X, Y Mengen, sodass X Dedekind-unendlich ist und $Y \sim X$. Dann ist Y Dedekind-unendlich. (Warum?)

Da ω Dedekind-unendlich und n nicht Dedekind-unendlich ist, folgt aus der Bemerkung, dass $n \not\sim \omega$.

Da $n \lesssim \omega$ und $n \not\sim \omega$, gilt $n < \omega$.

3. **(*) ($\mathbb{R} \setminus \{0\} \sim \mathbb{R}$, Cantor-Bernstein-Schröder)** Zeigen Sie, dass in ZF gilt, dass $\mathbb{R} \setminus \{0\} \sim \mathbb{R}$.

Hinweis: Verwenden Sie das THEOREM von Cantor-Bernstein-Schröder.

Lösung: Die Inklusion von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{R}$ ist eine Injektion. Also gilt $\mathbb{R} \setminus \{0\} \lesssim \mathbb{R}$. Die Exponential-Abbildung ist eine Injektion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Also gilt $\mathbb{R} \lesssim \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Gemäss dem THEOREM von Cantor-Bernstein-Schröder gilt daher, dass $\mathbb{R} \setminus \{0\} \sim \mathbb{R}$.

4. (*) ($\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\omega)$, **Cantor-Bernstein-Schröder**) Zeigen Sie, dass in ZF gilt, dass $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\omega)$.

Bemerkung: Es gilt $\mathcal{P}(\omega) \sim {}^\omega 2 = 2^\omega$. (Geben Sie eine Bijektion zwischen den Mengen an!) Es folgt, dass $\mathbb{R} \sim 2^\omega$.

Hinweise:

- THEOREM von Cantor-Bernstein-Schröder.
- $\mathbb{R} \lesssim \mathcal{P}(\omega)$: Verwenden Sie die Definition von $\mathbb{R}$ mittels Dedekindschnitten.
- $\mathcal{P}(\omega) \lesssim \mathbb{R}$: Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathcal{P}(\omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(S) := \sum_{k \in S} 3^{-k}. \quad (1)$$

(Wir definieren diese unendliche Summe wie in Analysis 1 als einen Grenzwert.)

Lösung: $\mathbb{R} \lesssim \mathcal{P}(\omega)$: Gemäss der Definition ist jede reelle Zahl, d. h. jeder Dedekindschnitt, eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$. Die Menge $\mathbb{R}$ ist daher eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Die Inklusion von $\mathbb{R}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ ist eine Injektion. Daher gilt $\mathbb{R} \lesssim \mathcal{P}(\omega)$.

$\mathcal{P}(\omega) \lesssim \mathbb{R}$: Sei $S \in \mathcal{P}(\omega)$. Die Teilsummenfolge $(\sum_{k \in S: k \leq n} 3^{-k})_{n \in \omega}$ konvergiert, da die geometrische Reihe mit Quotient $\frac{1}{3}$ eine Majorante für diese Teilsummenfolge ist. Wir definieren

$$\sum_{k \in S} 3^{-k} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in S: k \leq n} 3^{-k}.$$

Wir definieren die Abbildung f wie in (1). Diese Abbildung ist injektiv. (Überprüfen Sie das!) Es folgt, dass $\mathcal{P}(\omega) \lesssim \mathbb{R}$.

Aus dem THEOREM von Cantor-Bernstein-Schröder folgt daher, dass $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\omega)$.

5. (*) (**Kardinalzahl**) Zeigen Sie, dass für jede Kardinalzahl κ die Gleichheit $|\kappa| = \kappa$ gilt.

Hinweise für $|\kappa| \geq \kappa$: Wählen Sie eine Menge A , sodass $|A| = \kappa$. Sei $\alpha \in \Omega$ so, dass $\alpha \sim \kappa$. Verwenden Sie A , um zu zeigen, dass $\alpha \geq \kappa$, d. h. $\alpha \supseteq \kappa$.

Lösung: Erinnerung: Die Kardinalität einer Menge X ist die $\in$ -kleinste Ordinalzahl α , so dass $\alpha \sim X$.

Beweis von $|\kappa| \leq \kappa$: Die Menge $\alpha := \kappa$ ist eine Ordinalzahl mit $\alpha \sim \kappa$. Daher gilt $|\kappa| \leq \alpha = \kappa$.

Beweis von $|\kappa| \geq \kappa$: Wir wählen eine Menge A , sodass $|A| = \kappa$. Sei $\alpha \in \Omega$, sodass $\alpha \sim \kappa$. Da $\kappa \sim A$ und $\sim$ transitiv ist, folgt, dass $\alpha \sim A$. Da κ die kleinste Ordinalzahl mit $\kappa \sim A$ ist, folgt, dass $\alpha \geq \kappa$. Es folgt, dass $|\kappa| \geq \kappa$.

Da $|\kappa| \leq \kappa$ und $|\kappa| \geq \kappa$ gelten, folgt, dass $|\kappa| = \kappa$.