Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

In dieser Serie wiederholen wir aussagenlogische Begriffe, die Sie in Analysis 1 kennengelernt haben, sowie Quantoren.

### 0.1. wenn, (entweder) oder, es gibt, für jedes

**(i)** Für welche natürliche Zahlen $n$ ist die folgende Aussage wahr:

"Wenn $n$ gerade ist, dann ist $n + 1$ ungerade."

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

**(ii)** **(∗)** "Wenn 1 gerade ist, dann ist 2 ungerade."

**(iii)** "$1 + 1 = 2$ oder 1 ist ungerade."

**(iv)** "Entweder ist $1 + 1 = 2$ oder 1 ist ungerade."

**(v)** "Für jede natürliche Zahl $m$ gibt es eine natürliche Zahl $n$, sodass $m \leq n$ gilt."

**(vi)** "Es gibt eine natürliche Zahl $n$, sodass für jede natürliche Zahl $m$ gilt, dass $m \leq n$."

### 0.2. Verknüpfungen von Aussagen

**(a)** Wir schreiben $\dot\vee$ für das exklusive Oder, d. h. die logische Verknüpfung *entweder oder*. Schreiben Sie jede der folgenden Aussagen mittels mathematischer Symbole, ohne Wörter. Verwenden Sie das Negationszeichen $\neg$ und die Verknüpfungszeichen $\wedge, \vee, \dot\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ :

a) "Null plus eins ist eins, und null ist grösser als eins."

b) "Null plus eins ist eins, oder null ist kleiner als eins."

c) "Entweder ist null plus eins gleich eins, oder null ist kleiner als eins."

d) "Wenn null grösser als eins ist, dann ist null plus eins gleich null."

e) "Null ist genau dann grösser als eins, wenn null plus eins gleich eins ist."

**(b)** Bestimmen Sie für jede der obigen Aussagen, ob sie wahr ist.

### 0.3. Wahrheitstafeln, logische Äquivalenz

**(a)** **(∗)** Bestimmen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden verknüpften Aussagen:

$$\neg(P \wedge Q), \qquad (\neg P) \vee (\neg Q).$$

**(b)** **(∗)** Wir nennen zwei Aussagen $A, B$ *logisch äquivalent* g.d.w. [1] sie die gleichen Wahrheitstabellen besitzen. In diesem Fall schreiben wir:

$$A \Leftrightarrow B$$

Überprüfen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q). \tag{1}$$

**(c)** Bestimmen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden verknüpften Aussagen:

$$\neg(P \vee Q), \qquad (\neg P) \wedge (\neg Q).$$

**(d)** Überprüfen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q). \tag{2}$$

**Bemerkung:** (1,2) sind die de-morganschen Gesetze für Aussagen.

**(e)** Bestimmen Sie die Wahrheitstafel für die folgende verknüpfte Aussage:

$$(\neg Q) \to \neg P.$$

**(f)** Überprüfen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$P \to Q \Leftrightarrow (\neg Q) \to \neg P. \tag{3}$$

**Bemerkung:** *Kontraposition* (oder *Umkehrschluss*) ist die logische Schlussregel, die von der Implikation $P \to Q$ auf ihr Kontraponiertes $(\neg Q) \to \neg P$ schliesst. Diese Regel ist gültig wegen (3).

**(g)** Bestimmen Sie die Wahrheitstafel für die folgende verknüpfte Aussage:

$$(P \to Q) \wedge (Q \to P).$$

[1] genau dann, wenn

**(h)** Überprüfen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \land (Q \to P).$$

**(i)** Bestimmen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden verknüpften Aussagen:

$$P \land (Q \lor R), \qquad (P \land Q) \lor (P \land R)$$

**(j)** Zeigen Sie mittels der Wahrheitstafeln, dass

$$P \land (Q \lor R) \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (P \land R). \tag{4}$$

**Bemerkungen:**

- Das ist das *Distributivgesetz* für die Konjunktion $\land$ und die Disjunktion $\lor$. Dieses Gesetz ist analog zum Distributivgesetz für die Multiplikation und Addition von Zahlen.
- Bemerkenswerterweise gilt das Distributivgesetz für $\land$ und $\lor$ auch umgekehrt, also:

$$P \lor (Q \land R) \Leftrightarrow (P \lor Q) \land (P \lor R). \tag{5}$$

Dadurch unterscheiden sich die Konjunktion und die Disjunktion von der Multiplikation und Addition von Zahlen.

**(k)** Gilt

$$P \land (Q \lor R) \Leftrightarrow (P \land Q) \lor R?$$

**(l)** Überlegen Sie sich, welche mathematischen Interpretationen die alltägliche Äusserung "Für den angegebenen Preis erhalten Sie das Menü und Kaffee oder Kuchen." besitzt. Geben Sie für jede Interpretation die Wahlmöglichkeiten an, die der Kunde/ die Kundin besitzt. Sind die Interpretationen zueinander äquivalent? Welche mathematischen Interpretationen hat die gleiche Äusserung mit "oder" ersetzt durch "entweder ... oder"?

## 0.4. Quantoren

**(a)** Was bedeutet jede der folgenden Aussage? Ist sie wahr (in der üblichen Interpretation der Zeichen)?

1) **(*)** $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq 1 \lor n > 1$

2) $\forall x \in \mathbb{N} : x \leq 1 \vee x > 1$

3) $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : x \neq \frac{p}{q}$

**(b)** Schreiben Sie die folgenden Aussagen mittels Quantoren.

1) 24 ist keine Quadratzahl.

2) **(∗)** Zu jeder reellen Zahl gibt es eine natürliche Zahl, die grösser als die gegebene Zahl ist.

**Bemerkungen:**

- 1) und 2) sind wahr.
- 2) ist das *archimedische Prinzip*.

**0.5. Quantoren und Negation** Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie wahr ist (in der üblichen Interpretation der Zeichen). Formulieren Sie ihre Verneinung mittels Quantoren so um, dass darin keine Negation $\neg$ mehr vorkommt. Schreiben Sie die verneinte Aussage in Wörtern ohne mathematische Zeichen auf.

**(a)** $\forall n \in \mathbb{N} : n < n^2$

**(b)** $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq 1 \vee n > 1$

**(c)** **(∗)** $\forall x \in (0, \infty) \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

**(d)** $P :\equiv \exists n \in \mathbb{N}\, \forall x \in (0, \infty) : \frac{1}{n} < x$ (Das Symbol $:\equiv$ bedeutet, dass wir $P$ als die rechte Seite definieren.)